

MAGDA FIFIRIG

FIZICĂ

Electromagnetism

Editura Universității din București
– 2002 –

MAGDA FIFIRIG

FIZICĂ
Electromagnetism

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
2002

Referenți științifici: Prof. dr. Constantin Cioacă
Conf. dr. Ion Petre

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 934/2002 la
Tipografia Editurii Universității din București

B.C.U. "CAROL I" BUCUREȘTI



C20126720

© Editura Universității din București
Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon/Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale
FIFIRIG, MAGDA**

Fizică: electromagnetism / Magda Fifirig - București: Editura
Universității din București, 2002
Bibliografie
ISBN 973-575-664-1

537.6

Cuprins

1	Electrostatica	4
1.1	Legea lui Coulomb	5
1.2	Câmpul electric	6
1.3	Teorema Gauss	9
1.3.1	Sferă încărcată omogen în volum	10
1.3.2	Distribuție lineară de sarcină electrică	11
1.3.3	Pătură sferică încărcată uniform	13
1.3.4	Distribuție de sarcină electrică într-un plan infinit	13
1.4	Ecuția Poisson	13
1.5	Dipolul electric	16
1.6	Condensatori	17
1.6.1	Gruparea condensatorilor	18
1.7	Aplicații	20
2	Electrocinetică	27
2.1	Ecuția de continuitate	28
2.1.1	Regimul staționar	28
2.2	Conductivitatea electrică a metalelor	29
2.3	Circuite electrice și elemente de circuit	31
2.3.1	Legile lui Kirchhoff	32
2.4	Curentul electric în electroliți	36
2.5	Aplicații	38
3	Legile fundamentale ale magnetostaticii. Interacții electromagnetice	43
3.1	Legea lui Biot-Savart	44
3.1.1	Conductor rectiliniu de lungime infinită	45
3.1.2	Conductor rectiliniu de lungime finită	46
3.1.3	Spiră circulară	47
3.2	Legea lui Ampère	47
3.2.1	Conductor rectiliniu de lungime infinită	50

3.3	Acțiunea câmpului magnetic asupra unui conductor parcurs de un curent electric	50
3.4	Interacțiunea magnetică a curenților electrici	51
3.5	Acțiunea câmpului magnetic asupra unei sarcini electrice în mișcare . .	52
3.6	Mișcarea unei sarcini electrice în câmp magnetic	53
3.7	Aplicații	54
4	Inducția electromagnetică. Ecuatiile lui Maxwell	62
4.1	Experiențele lui Faraday	62
4.2	Legea inducției electromagnetice (legea lui Faraday)	67
4.3	Conductor metalic rectiliniu ce se deplasează într-un câmp magnetic uniform	68
4.4	Autoinducția	70
4.5	Aplicații	71
4.6	Ecuatiile lui Maxwell	74
4.6.1	Aplicații	77
5	Circuite electrice de curent alternativ. Regimul tranzitoriu în circuite electrice lineare	81
5.1	Valoarea efectivă	81
5.2	Elemente de circuit în curent alternativ	82
5.2.1	Rezistorul	82
5.2.2	Bobina ideală	83
5.2.3	Condensatorul	84
5.3	Circuite în curent alternativ	84
5.3.1	Circuitul RLC serie	84
5.4	Circuitul RLC paralel	90
5.5	Puterea în curent alternativ	92
5.6	Regimul tranzitoriu în circuitele electrice lineare	95
5.6.1	Circuitul RL serie	95
5.6.2	Circuitul RC serie	97
5.6.3	Circuitul LC serie	98
5.6.4	Circuitul electric oscilant	99
5.7	Aplicații	100
6	Câmpul electromagnetic	108
6.1	Clasificarea undelor electromagnetice	109
6.2	Ecuatiile lui Maxwell în vid	109
6.3	Ecuatia de propagare	110
6.4	Undele electromagnetice monocromatice plane	114
6.5	Densitatea de energie. Vectorul Poynting	115

6.6	Polarizarea undelor electromagnetice	117
6.7	Aplicații	120
7	Câmpul electromagnetic în medii izotrope	126
7.1	Modelul oscilatorului armonic	128
7.2	Ecuatiile lui Maxwell într-un mediu dielectric izotrop	130
7.3	Ecuatia de propagare a undelor electromagnetice în medii dielectrice . .	131
7.4	Ecuatia de propagare a undelor electromagnetice în medii conductoare	133
7.5	Reflexia și refracția luminii	136
7.6	Energia transportată de undele electromagnetice	138
7.7	Aplicații	139
8	Câmpul electromagnetic în medii anizotrope	142
8.1	Structura unde electromagnetice	142
8.2	Relația între \vec{D} și \vec{E}	144
8.3	Ecuatia lui Fresnel	145
8.4	Refracția luminii în medii anizotrope	147
8.5	Legea Malus	149
9	Suprapunerea undelor electromagnetice	151
9.1	Suprapunerea a două unde electromagnetice de frecvențe diferite	151
9.2	Interferența	152
9.3	Interferența a două unde plane	153
9.4	Interferența luminii	154
9.4.1	Dispozitivul Young	155
9.4.2	Lama cu fețe plan paralele	156
9.5	Aplicații	157
10	Difracția luminii	162
10.1	Difracția Fraunhofer	163
10.1.1	Difracția pe o fantă	163
10.1.2	Rețeaua de difracție unidimensională plană	165
10.1.3	Dispozitivul Young	175
10.2	Difracția Fresnel	180
10.3	Aplicații	182
11	Anexă - Relații fundamentale din analiza vectorială	184
12	BIBLIOGRAFIE	186

Capitolul 1

Electrostatica

Sarcina electrică se manifestă în interacțiunile de natură electromagnetică. Din punct de vedere al acestei proprietăți toate particulele se clasifică în trei clase numite convențional **neutre**, **pozitive** și **negative**. Particulele neutre nu interacționează electromagnetic cu nici o particulă fie ea neutră, pozitivă sau negativă. Spunem că particula este neîncărcată sau că sarcina sa electrică este nulă. Particulele din celelalte clase se numesc încărcate. Între aceste particule se manifestă interacțiuni electromagnetice. Prin convenție particulele unei clase se numesc pozitive iar celelalte negative.

Sarcina electrică elementară are valoarea de $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Ea reprezintă sarcina electrică a unui electron. La nivel microscopic sarcina electrică apare discontinuă în timp ce la nivel macroscopic (datorită valorii mici a sarcinii electronului) sarcina electrică apare continuă.

Pentru un sistem izolat (nu schimbă substanță cu exteriorul) se postulează legea conservării sarcinii electrice: **sarcina electrică totală a unui sistem izolat nu se modifică în timp**

$$\sum_i q_i = ct, \quad (1.1)$$

unde q_i este sarcina electrică a particulei i din sistem. Această lege este verificată de toate observațiile experimentale efectuate până în prezent.

Considerăm o sarcină electrică distribuită linear. Sarcina electrică a elementului infinitesimal de lungime dl este

$$dq = \lambda dl, \quad (1.2)$$

unde λ este densitatea lineară de sarcină electrică. Sarcina electrică a lungimii finite L este

$$q = \oint_L \lambda dl. \quad (1.3)$$

Dacă sarcina electrică este distribuită neuniform pe o suprafață, sarcina electrică a elementului infinitesimal de suprafață dS este

$$dq = \sigma dS, \quad (1.4)$$

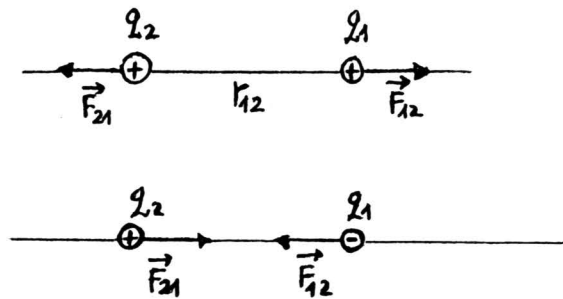


Figura 1.1:

unde σ este densitatea superficială de sarcină electrică. Sarcina electrică de pe suprafața S este

$$q = \int_S \sigma \, dS . \quad (1.5)$$

Când sarcina electrică este distribuită continuu în volum, sarcina electrică a elementului infinitesimal de volum dV este

$$dq = \rho \, dV , \quad (1.6)$$

unde ρ este densitatea volumică de sarcină electrică. Sarcina electrică din volumul finit V este

$$q = \int_V \rho \, dV . \quad (1.7)$$

1.1 Legea lui Coulomb

În 1785 a fost stabilită prima lege cantitativă din electrostatică. Conform acestei legi **forța de interacțiune între două sarcini electrice punctiforme se exercită de-a lungul drepte ce le unește și este proporțională cu produsul sarcinilor electrice și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele**

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} = -\vec{F}_{21} , \quad (1.8)$$

unde $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ este permitivitatea dielectrică a mediului în care sunt plasate sarcinile electrice, cu $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ permitivitatea dielectrică a vidului iar ϵ_r permitivitatea relativă a mediului. Relația (1.8) este **valabilă pentru medii omogene**. Forța (1.8) este de atracție dacă sarcinile electrice sunt de semn contrar sau de respingere dacă sarcinile electrice sunt de același semn (vezi Fig. 1.1).

Dacă sarcinile electrice sunt plasate în vid forța de interacțiune este

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} . \quad (1.9)$$

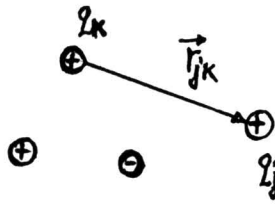


Figura 1.2:

În cazul unui sistem format din mai multe sarcini electrice punctiforme, forța rezultantă care acționează asupra sarcinii q_k (vezi Fig. 1.2) este egală cu suma vectorială a forțelor de interacțiune electrică între sarcina electrică q_k și fiecare sarcină electrică din sistem, independent de acțiunea altor sarcini electrice (principiul superpoziției, care în cazul sarcinilor electrice reprezintă principiul independenței acțiunii forțelor electrice)

$$\vec{F}_k = \frac{q_k}{4\pi\epsilon} \sum_j \frac{q_j}{r_{jk}^3} \vec{r}_{jk} . \quad (1.10)$$

1.2 Câmpul electric

Câmpul electric este o stare a materiei ce ia naștere în jurul sarcinilor electrice, fie că se află în vid sau în substanță. Câmpul electric este caracterizat de două mărimi fizice vectoriale: intensitatea câmpului electric \vec{E} și inducția câmpului electric \vec{D} . Pentru un mediu omogen și izotrop $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$.

Intensitatea câmpului electric este numeric egală cu forța care se exercită asupra unității de sarcină electrică

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} . \quad (1.11)$$

Expresia intensității câmpului electric creat de sarcina electrică punctiformă q_j într-un punct situat la distanța r_{jk} de punctul în care se află sarcina electrică punctiformă q_j este

$$\vec{E}_k = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_j}{r_{jk}^3} \vec{r}_{jk} . \quad (1.12)$$

Când avem un sistem de sarcini electrice punctiforme, intensitatea câmpului electric creat de sistemul de sarcini electrice într-un punct este egală cu suma vectorială a intensităților câmpurilor electrice create de sarcinile electrice din sistem în punctul respectiv (principiul superpoziției)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_j \frac{q_j}{r_j^3} \vec{r}_j . \quad (1.13)$$

În cazul unei distribuții continue de sarcină electrică, intensitatea câmpului electric are expresia

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{r^3} \vec{r} dV . \quad (1.14)$$

Lucrul mecanic efectuat la deplasarea sarcinii electrice q într-un câmp electric de intensitate \vec{E} este

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r} . \quad (1.15)$$

Ținând cont de relația (1.8) rezultă pentru lucrul mecanic expresia

$$dW = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{r^2} dr , \quad (1.16)$$

unde $\vec{r}^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$, care prin diferențiere dă $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$.

Câmpul electric produs de o sarcină electrică în **repaus** este caracterizat și de mărimea fizică scalară, numită potențial electric. **Potențialul electric într-un punct oarecare dintr-un câmp electric este numeric egal cu lucrul mecanic efectuat de câmpul electric pentru a deplasa unitatea de sarcină electrică din punctul respectiv la infinit.**

Ținând cont de (1.16), expresia potențialului câmpului electric creat de sarcina Q în punctul M situat la distanța r de ea are expresia

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} . \quad (1.17)$$

Folosind principiul superpoziției putem calcula potențialul electric creat de un sistem de sarcini electrice. El este egal cu suma algebrică a potențialelor create de fiecare sarcină electrică din sistem, independent de celelalte

$$V = \sum_j V_j .$$

În cazul unei distribuții continue de sarcină electrică, potențialul câmpului electric are expresia

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dq}{r^2} . \quad (1.18)$$

Integrala este curbilinie, de suprafață sau de volum după cum avem distribuție de sarcină lineară, de suprafață sau de volum.

Diferența de potențial între două puncte M și N din câmp este numeric egală cu lucrul mecanic cu semn schimbat, efectuat de câmp pentru a deplasa unitatea de sarcină electrică din punctul M în punctul N . Deci

$$V_M - V_N = - \int_N^M \vec{E} \cdot d\vec{r} ,$$

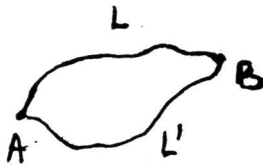


Figura 1.3:

de unde rezultă că $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$. Relația $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$ se poate scrie și sub forma

$$dV = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) . \quad (1.19)$$

Confruntând relația (1.19) cu

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz ,$$

obținem

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} ,$$

sau

$$\vec{E} = - \text{grad } V . \quad (1.20)$$

Din (1.15) și (1.20) rezultă

$$dW = q \vec{E} \cdot d\vec{r} = -q \text{grad} V d\vec{r} = -q dV . \quad (1.21)$$

Integrând relația $q \vec{E} \cdot d\vec{r} = -q dV$ pe un contur închis (fie conturul închis $\Gamma = ALBL'A$ reprezentat în Fig. 1.3.) obținem

$$q \int_{A(L)}^B \vec{E} \cdot d\vec{r} + q \int_{B(L')}^A \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 . \quad (1.22)$$

De unde

$$q \int_{A(L)}^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_{A(L')}^B \vec{E} \cdot d\vec{r} ,$$

sau $q \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$. Deci lucrul mecanic efectuat de forța coulombiană pe un contur închis este nul (câmpul electric este conservativ). Din (1.22) rezultă că

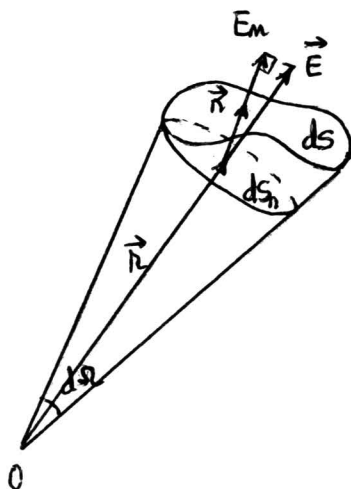
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 . \quad (1.23)$$

Prin urmare circulația vectorului \vec{E} este nulă.

Din ecuația (1.23), în urma aplicării teoremei lui Stokes (ce transformă o integrală curbilinie într-o integrală de suprafață), obținem $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0$. Suprafața S fiind oarecare rezultă

$$\text{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.24)$$

Subliniem că ecuațiile (1.23) și (1.24) sunt valabile pentru câmpul electric creat de sarcini electrice în repaus. Ecuația (1.23) reprezintă forma integrală, iar ecuația (1.24) reprezintă forma diferențială a uneia din cele patru ecuații Maxwell scrisă pentru câmpul electric produs de sarcini electrice în repaus.



$$\begin{aligned} d\Omega &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{dS_m}{r^2} \\ d\Omega &= \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} dS = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3} \\ d\vec{S} &= \vec{n} dS \\ dS_m &= dS \cos(\vec{r}, \vec{n}) \end{aligned}$$

Figura 1.4:

1.3 Teorema Gauss

Fluxul câmpului electric printr-o suprafață închisă S situată în câmpul electric este

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS. \quad (1.25)$$

Fluxul este ~~determinat~~ de componenta intensității câmpului electric, normală la suprafața dS sau de proiecția suprafeței dS pe planul normal la \vec{E} .

În cazul unei sarcini electrice punctiforme q , fluxul câmpului electric ce străbate suprafața dS situată la distanța r de sarcina electrică este

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \vec{r} \cdot \vec{n} dS.$$

Folosind expresia unghiului solid $d\Omega$ (vezi Fig. 1. 4) sub care se vede elementul de suprafață dS

$$d\Omega = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} dS , \quad (1.26)$$

rezultă pentru fluxul elementar expresia

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} d\Omega . \quad (1.27)$$

Fluxul câmpului electric creat de sarcina electrică punctiformă q este

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int d\Omega = \frac{q}{\epsilon} . \quad (1.28)$$

Teorema Gauss afirmă că **fluxul câmpului electric printr-o suprafață închisă este proporțional cu sarcina electrică cuprinsă de această suprafață**

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon} \sum_j q_j , \quad (1.29)$$

în cazul unei distribuții continue de sarcină electrică relația (1.29) devine

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon} \int dq . \quad (1.30)$$

În ecuația (1.29) fluxul câmpului electric Φ se determină cu (1.25).

Teorema Gauss ne permite să calculăm intensitatea câmpului electric în cazul unor distribuții de sarcină electrică caracterizate de o simetrie ridicată. Suprafața delimitată de curba închisă Γ ce conține sarcina electrică se numește **suprafață gaussiană**, iar curba închisă **gaussiană**.

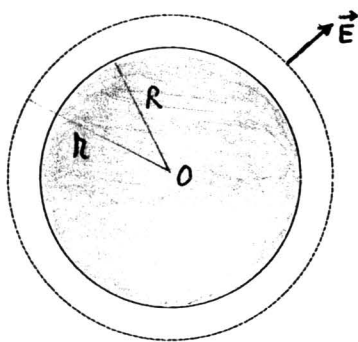
1.3.1 Sferă încărcată omogen în volum

Pentru a calcula intensitatea câmpului electric în exteriorul sferei încărcată electric utilizăm drept suprafață gaussiană o suprafață sferică concentrică cu cea a distribuției de sarcină de rază $r > R$, unde R este raza sferei (vezi Fig. 1.5). ~~Deoarece~~ datorită simetriei sferice mărimea câmpului E este aceeași în toate punctele de pe gaussiană, ținând cont că $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ teorema Gauss se scrie $\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$.

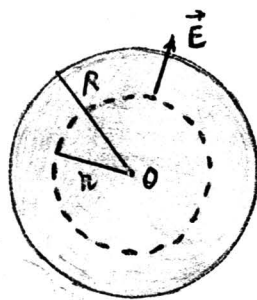
De unde obținem

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} . \quad (1.31)$$

Rezultatul (1.31) coincide cu cel obținut în cazul în care întreaga sarcină electrică ar fi concentrată în centrul sferei.



1.5



1.6

Figura 1.5 & 1.6

Pentru a calcula intensitatea câmpului electric în interiorul sferei încărcată electric considerăm drept suprafață gaussiană o suprafață sferică concentrică cu cea a distribuției de sarcină de rază $r < R$ (vezi Fig. 1.6). Sarcina electrică conținută în interiorul gaussienei este

$$q \left(\frac{r}{R} \right)^3.$$

Ținând cont că $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ teorema Gauss se scrie

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{qr^3}{\epsilon_0 R^3}.$$

De unde obținem

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (1.32)$$

1.3.2 Distribuție lineară de sarcină electrică

În cazul unei distribuții lineare de sarcină electrică de lungime infinită, considerăm din această distribuție doar o porțiune finită de lungime l (vezi Fig. 1.7). Se construiește o suprafață gaussiană cilindrică, astfel încât axul cilindrului coincide cu distribuția lineară de sarcină electrică. Deoarece intensitatea câmpului electric este perpendiculară pe distribuția lineară de sarcină electrică, fluxul prin bazele cilindrului este nul. Datorită simetriei cilindrice mărimea câmpului E este aceeași în toate punctele de pe gaussiană. Scriem teorema Gauss $E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}.$

De unde obținem

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.33)$$

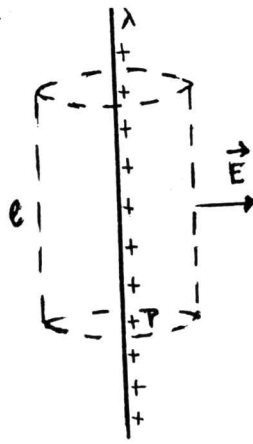
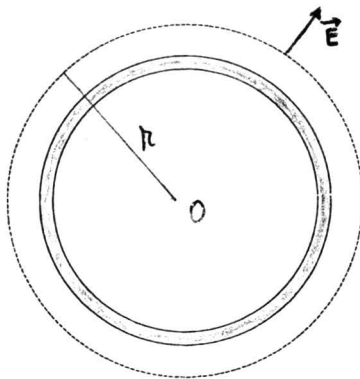
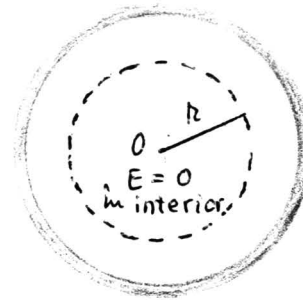


Figura 1.7:



1.8



1.9

Figura 1.8 & 1.9

1.3.3 Pătură sferică încărcată uniform

Considerăm o pătură sferică de grosime neglijabilă încărcată uniform cu sarcina electrică q . Pentru a calcula intensitatea câmpului electric în exteriorul păturii sferice considerăm drept suprafață gaussiană o suprafață sferică concentrică cu cea a distribuției de sarcină, de rază $r > R$, unde R este raza păturii sferice (vezi Fig. 1.8). Scriem teorema Gauss

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

De unde obținem

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{1.34}$$

Rezultatul (1.34) coincide cu cel obținut în cazul în care întreaga sarcină electrică q ar fi concentrată în centrul sferei.

Pentru a calcula intensitatea câmpului electric în interiorul păturii sferice considerăm o suprafață gaussiană care este o suprafață concentrică cu cea a distribuției de sarcină, de rază $r < R$ (vezi Fig. 1.9). Sarcina electrică conținută în interiorul gaussienei este zero. Scriem teorema lui Gauss

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = 0.$$

De unde obținem

$$E = 0. \tag{1.35}$$

1.3.4 Distribuție de sarcină electrică într-un plan infinit

Construim o gaussiană cilindrică ce are bazele paralele cu planul infinit (vezi Fig. 1.10). Intersecția gaussienei cu planul este o suprafață S cu o distribuție uniformă de sarcină electrică. Intensitatea câmpului electric produs de distribuția considerată este orientată perpendicular pe plan. *E fiind paralel cu suprafața laterală a cilindrului, fluxul prin această suprafață este zero. Astfel, teorema lui Gauss devine*

$\epsilon_0(E S + E S) = \sigma S$
(σS este sarcina electrică din interiorul gaussienei, E este constant în toate punctele, în ambele părți ale planului).
 Obținem pentru E expresia

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{1.36}$$

1.4 Ecuația Poisson

Intr-o distribuție continuă de sarcină electrică considerăm elementul infinitezimal de volum $dV = dx dy dz$. Intensitatea câmpului electric produs de sarcina electrică conținută în acest volum este orientată în sensul pozitiv al axelor de coordonate (vezi

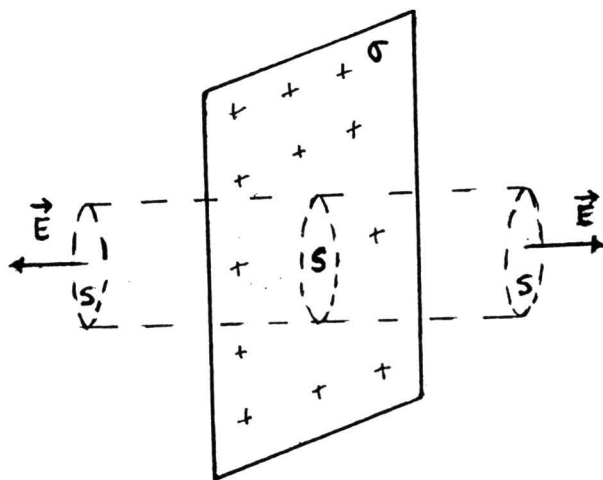


Figura 1.10

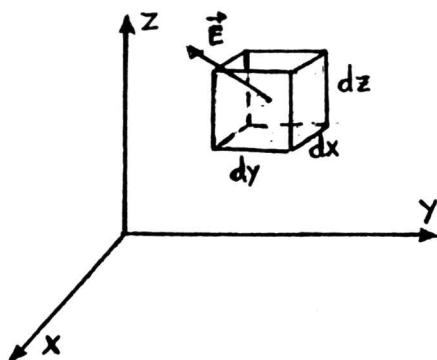


Figura 1.11

Fig. 1. 11). Fețele 1 și 2 ale cubului sunt perpendiculare pe axa Ox , 3 și 4 pe axa Oy , iar 5 și 6 pe axa Oz . Fluxul câmpului electric prin fețele 1, 3 și 5 este negativ

$$\begin{aligned}d\Phi_1 &= -E_x \, dz \, dy \, , \\d\Phi_3 &= -E_y \, dx \, dz \, , \\d\Phi_5 &= -E_z \, dy \, dx \, ,\end{aligned}$$

iar cel prin fețele 2, 4 și 6 este pozitiv

$$\begin{aligned}d\Phi_2 &= \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \, dx \right) \, dz \, dy \, , \\d\Phi_4 &= \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} \, dy \right) \, dx \, dz \, , \\d\Phi_6 &= \left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} \, dz \right) \, dy \, dx \, .\end{aligned}$$

Insumând cele șase relații de mai sus obținem

$$d\Phi = \sum_{i=1}^6 d\Phi_i = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz \, . \quad (1.37)$$

Scriem teorema lui Gauss pentru sarcina conținută în elementul de volum dV

$$d\Phi = \frac{\rho \, dV}{\epsilon_0} = \frac{\rho \, dx \, dy \, dz}{\epsilon_0} \, . \quad (1.38)$$

Din ecuațiile (1.37) și (1.38) obținem

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \, . \quad (1.39)$$

Primul membru al ecuației (1.39) reprezintă $\operatorname{div} \vec{E}$, deci

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \, . \quad (1.40)$$

Ecuația (1.39) reprezintă forma diferențială a legii lui Gauss pentru sarcinile electrice aflate în vid.

La același rezultat (1.40) ajungem dacă pornim de la teorema lui Gauss scrisă sub forma

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV \, . \quad (1.41)$$

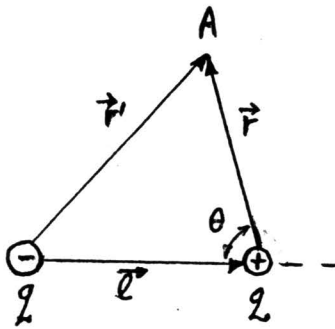


Figura 1.12:

Aplicând teorema Gauss-Ostrogradsky (ce transformă o integrală de suprafață într-o integrală de volum) obținem $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div} \vec{E} dV = \int_V (\rho/\epsilon_0) dV$. Volumul V fiind oarecare rezultă ecuația (1.40).

Ecuația (1.41) reprezintă forma integrală, iar ecuația (1.40) forma diferențială a uneia din cele patru ecuații Maxwell scrisă pentru **câmpul electric produs de o sarcină punctiformă în repaus și plasată în vid**.

Introducând ecuația (1.22) în (1.40) avem

$$\text{div}(\text{grad } V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

De unde obținem

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.42)$$

sau $\Delta V = \nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$. Această ecuație poartă numele de **ecuația Poisson**. În cazul în care nu există sarcină electrică ea devine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (1.43)$$

sau $\Delta V = \nabla^2 V = 0$. Această ecuație poartă numele de **ecuația Laplace**.

1.5 Dipolul electric

Numim **dipol electric** un sistem de două sarcini electrice punctiforme, cu valorile absolute egale, situate la o distanță l mică în comparație cu distanța până la punctul în care calculăm potențialul sau intensitatea câmpului electric (vezi Fig. 1.12).

Potențialul dipolului electric în punctul A este

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right). \quad (1.44)$$

Folosind teorema cosinusului $r'^2 = r^2 + l^2 + 2lr \cos \theta$ putem scrie că

$$r'^2 = r^2 \left(1 + \frac{l^2}{r^2} + 2\frac{l}{r} \cos \theta \right) .$$

În relația

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l^2}{r^2} + 2\frac{l}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{r^2} + 2\frac{l}{r} \cos \theta \right) + \dots \right] ,$$

putem neglija termenii cu r^3 la numitor, când $r \gg l$ și $r' \gg l$. În aceste condiții, ecuația (1.44) devine

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} ,$$

unde

$$\vec{p} = ql , \quad (1.45)$$

se numește **momentul dipolului electric**. Obținem pentru potențialul dipolului electric expresia

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} . \quad (1.46)$$

Intensitatea câmpului electric se obține cu ecuația (1.22).

1.6 Condensatori

Experimental s-a constatat că raportul dintre sarcina electrică Q a unui conductor izolat și depărtat de alte corpuri și potențialul său V este constant. Acest raport poartă numele de **capacitatea electrică** a conductorului C :

$$C = \frac{Q}{V} . \quad (1.47)$$

Unitatea de capacitate electrică în SI se numește farad cu simbolul F . Faradul reprezintă capacitatea unui conductor izolat și depărtat de alte corpuri, care încărcat cu sarcina electrică de 1 C are potențialul de 1 V.

Dispozitivul format dintr-un ansamblu de două conductoare, numite armături, separate între ele printr-un strat izolator poartă numele de **condensator**. Un condensator poate fi încărcat cu sarcină electrică astfel: i) se încarcă una dintre armături cu ajutorul unei mașini electrostatice și atunci pe cea de-a doua armătură apare prin influență o sarcină egală și de semn contrar; ii) se leagă fiecare armătură la câte un pol al unei baterii (sursă de tensiune constantă) și atunci pe una dintre armături vin electroni de la sursă, iar de pe cealaltă se duc electroni la sursă, până când ele se încarcă

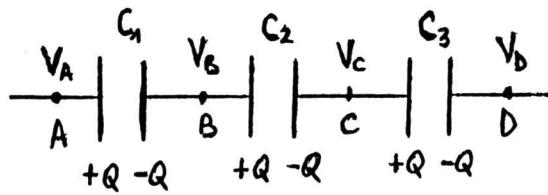


Figura 1.13:

cu sarcini egale și de semne contrare. Capacitatea unui condensator se definește ca raportul dintre sarcina electrică Q de pe o armătură și diferența de potențial dintre cele două armături $V_1 - V_2$:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} . \quad (1.48)$$

În cazul particular în care armăturile sunt plane și paralele condensatorul se numește **plan**. Considerăm un condensator plan, ce are armături de suprafață S situate la distanța d una de cealaltă și între care există un mediu de permitivitate ϵ . Neglijăm efectele de margine. Ținând cont de teorema lui Gauss obținem pentru intensitatea câmpului electric în spațiul dintre armături expresia

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} , \quad (1.49)$$

unde $\sigma = Q/S$. Diferența de potențial dintre cele două armături este $V_1 - V_2 = Ed = \sigma d/\epsilon$. Introducând expresia diferenței de potențial în (1.48) obținem pentru capacitatea electrică a unui condensator plan expresia

$$C = \frac{\epsilon S}{d} . \quad (1.50)$$

Energia electrică înmagazinată într-un condensator plan este

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{U^2 C}{2} = \frac{QU}{2} , \quad (1.51)$$

unde $U = V_1 - V_2$.

1.6.1 Gruparea condensatorilor

Cele mai simple moduri de grupare a condensatorilor sunt: i) în serie și ii) în paralel. Gruparea condensatorilor în serie se realizează legând o armătură a primului condensator cu o armătură a celui de al doilea, cealaltă armătură a celui de al doilea cu o armătură a celui de al treilea ș. a. m. d. (Fig. 1.13). Dacă se aduce pe armătura

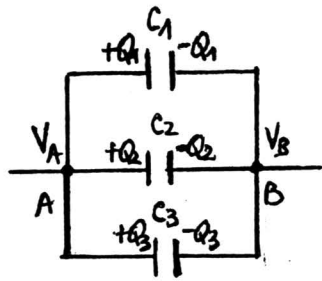


Figura 1.14:

din dreapta a celui de al treilea condensator sarcina electrică $-Q$, pe armătura lui stângă apare prin influență sarcina electrică $+Q$. Prin deplasarea unor electroni pe armătura din dreapta a celui de al doilea condensator, sarcina electrică a acestei armături va fi $-Q$ iar pe armătura lui stângă prin influență va apare sarcina electrică $+Q$ ș. a. m. d. Sarcina electrică pe fiecare armătură a condensatorilor legați în serie are aceeași valoare, alternând pozitivă și negativă. Potențialul armăturilor legate împreună este același. Diferențele de potențial dintre armăturile fiecărui condensator sunt $V_A - V_B = Q/C_1$, $V_B - V_C = Q/C_2$, $V_C - V_D = Q/C_3$, iar diferența de potențial dintre armăturile exterioare este $V_A - V_D = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D)$. Din aceste expresii obținem

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = \frac{Q}{C},$$

unde $C = Q/(V_A - V_D)$ este capacitatea condensatorului care poate înlocui gruparea (sub diferența de potențial $V_A - V_D$ are pe o armătură sarcina electrică Q). Rezultă că

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}, \quad (1.52)$$

unde N este numărul de condensatori legați în serie. Așadar, inversul capacității unei grupări de condensatori legați în serie este egal cu suma inverselor capacităților condensatorilor componenți.

Gruparea în paralel se realizează unind într-un punct A câte o armătură a fiecărui condensator și într-un punct B celelalte armături (Fig. 1.14). Punând în legătură cu o sursă de tensiune constantă cele două puncte A și B , la echilibru, toate armăturile pozitive vor avea același potențial V_A , iar cele negative potențialul V_B . La aceeași diferență de potențial $V_A - V_B$ dintre armături, condensatorii vor acumula sarcini electrice diferite: $Q_1 = C_1(V_A - V_B)$, $Q_2 = C_2(V_A - V_B)$, $Q_3 = C_3(V_A - V_B)$. Sarcina electrică totală este $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)(V_A - V_B) = C(V_A - V_B)$ unde

C este capacitatea condensatorului care poate înlocui gruparea (acesta sub diferența de potențial $V_A - V_B$ are pe o armătură sarcina electrică Q). Rezultă că

$$C = \sum_{i=1}^N C_i, \quad (1.53)$$

unde N este numărul de condensatori legați în paralel. Așadar, capacitatea unei grupări de condensatori legați în paralel este egală cu suma capacităților condensatorilor componenți.

1.7 Aplicații

1.1. Un conductor linear subțire de lungime $l = 30$ cm este încărcat electric uniform cu o densitate de sarcină $\lambda = 10^{-6}$ C/m. La distanța $h = 20$ cm de conductor se află o sarcină $Q = 10^{-9}$ C, la egală depărtare de capetele conductorului. Să se determine forța F cu care acționează conductorul asupra sarcinii punctiforme.

R: Considerăm un element infinitesimal de lungime dx situat la distanța x de piciorul perpendicularei dusă din punctul M unde se află sarcina electrică Q . Sarcina electrică a elementului infinitesimal este $dq = \lambda dx$. Forța de respingere dintre Q și dq este

$$dF = \frac{Q\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Conform Fig. 1. 15.

$$x = h \tan \alpha, \quad r = \frac{h}{\cos \alpha}, \quad dx = \frac{h d\alpha}{\cos^2 \alpha},$$

deci

$$dF = \frac{Q\lambda d\alpha}{4\pi\epsilon_0 h}.$$

Componentele paralele ale forțelor determinate de elementele situate simetric față de perpendiculara dusă din punctul M , se anulează reciproc. Forța rezultantă ce acționează asupra lui Q este perpendiculară pe conductor

$$dF_{\perp} = \frac{Q\lambda \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 h},$$

unde α variază de la $-\alpha_m$ la α_m , cu

$$\sin \alpha_m = \frac{l/2}{\sqrt{h^2 + l^2/4}}.$$

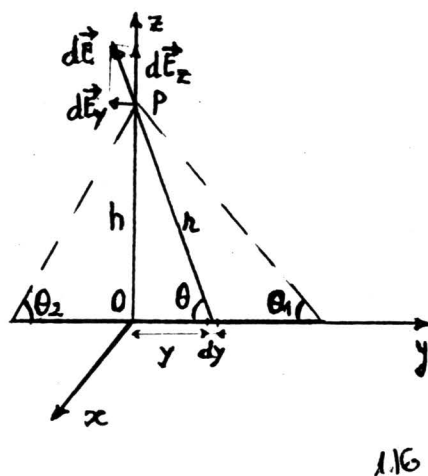
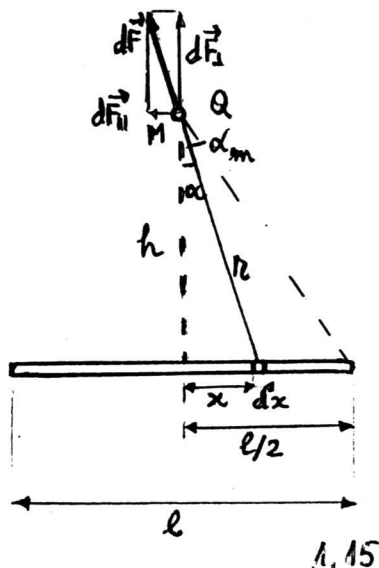


Figura 1.15 & 1.16

Forța totală este

$$F_{\perp} = \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \frac{Q\lambda \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 h} = \frac{Q\lambda l}{2\pi\epsilon_0 h \sqrt{4h^2 + l^2}} = 0,54 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

1.2. Fie câmpul electric creat de sarcinile electrice uniforme distribuite cu densitatea lineară λ , pe un conductor rectiliniu de lungime l , aflat în vid. Să se afle intensitatea câmpului electric într-un punct P situat la distanța h de conductor. Din acest punct extremitățile conductorului se văd sub unghiurile θ_1 și θ_2 .

R: Considerăm elementul infinitesimal dy situat la distanța y de originea sistemului de axe (vezi Fig. 1. 16). Sarcina electrică distribuită pe acest element este

$$dq = \lambda \cdot dy.$$

Intensitatea câmpului electric creat de sarcina elementară dq este dat de

$$dE = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Componenta pe axa Oz a lui $d\vec{E}$ este

$$dE_z = dE \cdot \sin \theta = -\frac{\lambda \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 h}.$$

S-a ținut cont de relațiile $r = h / \sin \theta$, $tg \theta = h / y$ și $dy = -(h / \sin^2 \theta) d\theta$. Componenta pe axa Oy a lui $d\vec{E}$ este

$$dE_y = dE \cdot \cos \theta = -\frac{\lambda \cos \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 h}.$$

Intensitatea câmpului electric creat de sarcina electrică distribuită pe conductor are componentele

$$E_z = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h} \int_{\pi-\theta_2}^{\theta_1} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2),$$

$$E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h} \int_{\pi-\theta_2}^{\theta_1} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1).$$

1.3. Se consideră o spirală de rază R pe care este distribuită uniform sarcina electrică de densitate lineară λ . Să se determine intensitatea și potențialul câmpului electric într-un punct P situat la distanța h de spirală, pe normala dusă din centrul spirei.

R: Considerăm elementul infinitesimal dl (vezi Fig. 1. 17) de sarcină electrică $dq = \lambda \cdot dl$. Componenta paralelă cu planul spirei, a intensității câmpului electric creat de elementul infinitesimal dl și cea corespunzătoare elementului situat diametral opus, se anulează. Deci câmpul electric este orientat perpendicular pe planul spirei (are direcția axei Oz). Componenta pe axa Oz a lui $d\vec{E}$ este

$$dE_z = dE \cdot \cos \alpha = \frac{\lambda h dl}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

S-a ținut cont de relațiile $\cos \alpha = h/r$ și $r = \sqrt{R^2 + h^2}$. Câmpul electric rezultat are expresia

$$E_z = \frac{\lambda h R}{2\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

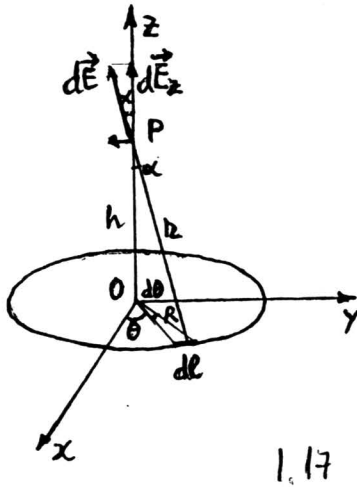
Pentru determinarea potențialului folosim relația $\vec{E} = -grad V$. În cazul nostru avem

$$E_z = -\frac{dV}{dz},$$

de unde

$$V = -\int_{\infty}^h E_z dz$$

$$= \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \int_h^{\infty} \frac{z dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{-\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \Bigg|_h^{\infty} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{h^2 + R^2}}.$$



1,17

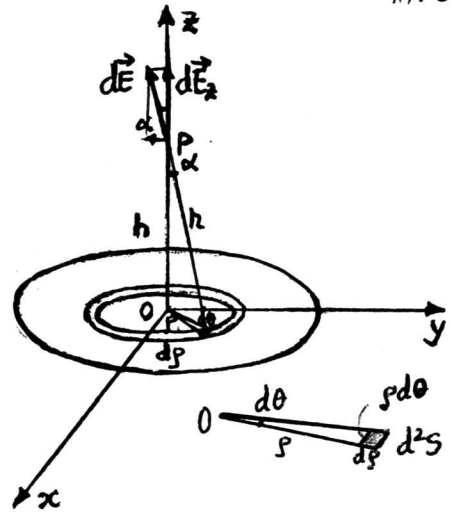


Figura 1.17 & 1,18

1.4. Se consideră un disc de rază R pe care este distribuit uniform sarcina electrică de densitate σ . Să se determine intensitatea și potențialul câmpului electric într-un punct P situat la distanța h de centrul discului, pe axa de simetrie a discului.

R: Considerăm elementul infinitezimal de suprafață $d^2S = \rho d\theta d\rho$ (vezi Fig. 1.18) pe care se distribuie sarcina electrică $d^2q = \sigma \rho d\theta d\rho$. Componenta pe axa Oz a lui $d\vec{E}$ este

$$d^2E_z = \frac{\sigma \rho h d\theta d\rho}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + h^2)^{3/2}}.$$

S-au folosit relațiile $\cos \alpha = h/r$ și $r = \sqrt{\rho^2 + h^2}$. Datorită simetriei problemei câmpul electric rezultat este orientat de-a lungul axei Oz , deci

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma h}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \frac{1}{(\rho^2 + h^2)^{1/2}} \Big|_0^R \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right). \end{aligned}$$

Potențialul câmpului electric în punctul P este

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\infty}^h E_z dz = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_h^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) dz \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(z - \sqrt{R^2 + z^2} \right) \Big|_h^{\infty} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{z + \sqrt{R^2 + z^2}} \Big|_h^{\infty} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 (h + \sqrt{R^2 + h^2})}. \end{aligned}$$

Expresia potențialului se poate obține și folosind relația

$$d^2 \mathbf{V} = \frac{d^2 q}{4\pi \epsilon_0 r} ,$$

unde $r = (\rho^2 + h^2)^{1/2}$. Potențialul câmpului electric în punctul P este

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left. \sqrt{\rho^2 + h^2} \right|_0^R \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + h^2} - h \right) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 \left(h + \sqrt{R^2 + h^2} \right)} . \end{aligned}$$

1.5. Se consideră o coroană circulară de raze R_1 și R_2 , pe care este distribuită uniform sarcină electrică cu densitatea σ . Să se afle intensitatea și potențialul câmpului electric într-un punct P situat la distanța h de coroana circulară, pe axa de simetrie a coroanei.

R: Considerăm elementul infinitezimal de suprafață $d^2 S = \rho d\theta d\rho$ (vezi Fig. 1. 19) pe care se distribuie sarcina electrică $d^2 q = \sigma \rho d\theta d\rho$. Componenta pe axa Oz a lui $d\vec{E}$ este

$$d^2 E_z = \frac{\sigma \rho h d\theta d\rho}{4\pi \epsilon_0 (\rho^2 + h^2)^{3/2}} .$$

S-au folosit relațiile $\cos \alpha = h/r$ și $r = \sqrt{\rho^2 + h^2}$. Datorită simetriei problemei câmpul electric rezultat este perpendicular pe planul coroanei circulare, deci

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma h}{4\pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{(R_1^2 + h^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R_2^2 + h^2)^{1/2}} \right] . \end{aligned}$$

Potențialul câmpului electric în punctul P este

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= - \int_{\infty}^h E_z dz = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_h^{\infty} \left(\frac{z}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right) dz \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R_1^2 + z^2} - \sqrt{R_2^2 + z^2} \right) \Big|_h^{\infty} = \frac{\sigma (R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 \left(\sqrt{R_1^2 + h^2} + \sqrt{R_2^2 + h^2} \right)} . \end{aligned}$$

Expresia potențialului se poate obține și folosind relația

$$d^2 \mathbf{V} = \frac{d^2 q}{4\pi \epsilon_0 r} ,$$

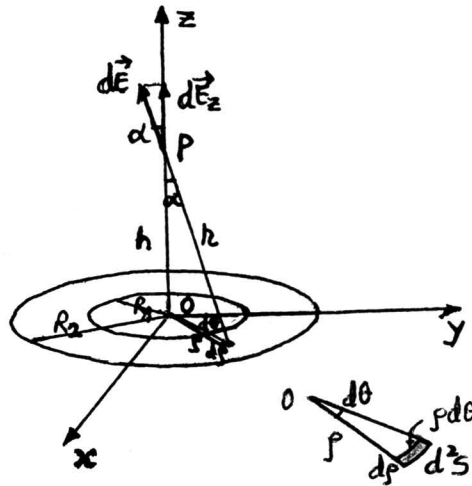


Figura 1.19:

unde $r = (\rho^2 + h^2)^{1/2}$. Potențialul câmpului electric în punctul P este

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left. \sqrt{\rho^2 + h^2} \right|_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2 + h^2} - \sqrt{R_1^2 + h^2} \right) = \frac{\sigma(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 \left(\sqrt{R_1^2 + h^2} + \sqrt{R_2^2 + h^2} \right)}. \end{aligned}$$

1.6. Două sfere metalice concentrice de raze R_1 și R_2 ($R_1 > R_2$) au sarcinile electrice $+q$ și respectiv $-q$. Să se determine diferența de potențial dintre sfere și capacitatea condensatorului astfel format.

R: Potențialul electric al sferei interioare este

$$V_1 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

iar al sferei exterioare

$$V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1} \right) = 0.$$

Diferența de potențial dintre cele două sfere este

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}.$$

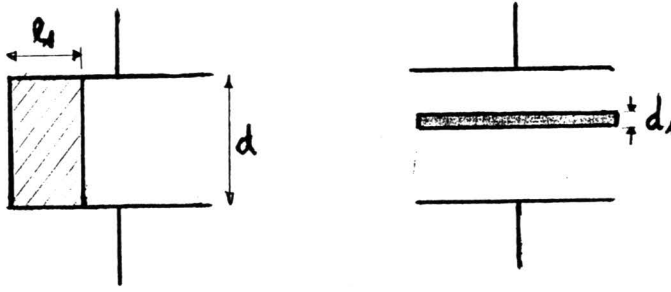


Figura 1.20:

Capacitatea condensatorului va fi

$$C = \frac{q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}.$$

1.7. Spațiul dintre armăturile unui condensator plan este umplut cu un dielectric ca în Fig. 1. 20. Suprafața fiecărei armături este A , iar permitivitatea dielectricului este ϵ_r . Să se găsească capacitatea condensatorului în fiecare caz.

R: a) Capacitatea este egală cu capacitatea echivalentă a doi condensatori în paralel

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A l_1}{l d} + \frac{\epsilon_0 A (l - l_1)}{l d} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \left[1 + (\epsilon_r - 1) \frac{l_1}{l} \right].$$

b) Capacitatea este egală cu capacitatea echivalentă a doi condensatori în serie

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

unde

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d - d_1}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d_1}.$$

Deci

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d_1 + \epsilon_r (d - d_1)}.$$

Capitolul 2

Electrocinetică

Acest capitol se referă la fenomenele electrice produse de sarcinile electrice aflate în mișcare. Deplasarea ordonată a sarcinilor electrice (electroni sau ioni) se numește **curent electric**. Dacă sensul și intensitatea acestuia nu variază în timp el poartă numele de **curent continuu**. Prin convenție se alege drept sens al curentului sensul de deplasare al sarcinilor electrice pozitive.

Intensitatea curentului electric printr-un conductor este numeric egală cu sarcina electrică transportată prin secțiunea conductorului în unitatea de timp

$$I = \frac{q}{t} . \quad (2.1)$$

Unitatea SI pentru intensitatea curentului electric este amperul cu simbolul A .

Curentul electric este definit și de mărimea fizică vectorială numită **densitate de curent**. Sensul acestui vector este sensul de deplasare al sarcinilor pozitive. Densitatea de curent reprezintă cantitatea de electricitate ce traversează în unitatea de timp, unitatea de suprafață așezată perpendicular pe direcția de deplasare a sarcinilor electrice

$$j = |\vec{j}| = \frac{I}{S} . \quad (2.2)$$

Prin elementul de suprafață dS trece curentul electric

$$dI = \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS .$$

Pentru o suprafață S traversată de sarcinile electrice avem

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS . \quad (2.3)$$

2.1 Ecuația de continuitate

Considerăm un volum arbitrar V delimitat de suprafața închisă S . În interiorul volumului V există sarcina electrică

$$q = \int_V \rho \, dV ,$$

unde ρ este densitatea volumică de sarcină electrică. În unitatea de timp prin suprafața S iese cantitatea de sarcină electrică $\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$. Utilizând teorema Gauss-Ostrogradsky $\oint_S \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV$, (unde \vec{a} este un vector oarecare) această cantitate de sarcină electrică este egală cu $\int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV$. În volumul V sarcina electrică scade în unitatea de timp cu cantitatea

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV .$$

Aplicând conservarea sarcinii electrice (cantitatea de sarcină electrică care traversează suprafața S este egală cu cantitatea cu care scade (în același timp) sarcina electrică conținută în interiorul volumului V delimitat de suprafața S)

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV , \quad (2.4)$$

sau

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV . \quad (2.5)$$

Derivata lui ρ în raport cu timpul se scrie ca o derivată parțială deoarece ρ este funcție de coordonatele de poziție și de timp. De unde

$$\int_V \left(\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 . \quad (2.6)$$

Volumul V fiind ales arbitrar, egalitatea (2.6) este satisfăcută dacă integrantul este nul

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (2.7)$$

Ecuația (2.7) poartă numele de ecuația de continuitate. Ea este o expresie a legii conservării sarcinii electrice.

2.1.1 Regimul staționar

Considerăm cazul în care densitatea de sarcină electrică este constantă în timp, deci

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 .$$

Din ecuația de continuitate rezultă

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 ,$$

sau $\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = 0$. Considerăm un tub de curent (volumul delimitat de liniile tangente la \vec{j} duse prin toate punctele conturului închis ce mărginește suprafața S) între două secțiuni S_1 și S_2 . Ultima integrală ne dă

$$\int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{n} dS - \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = 0 ,$$

deoarece integrala pe suprafața laterală este nulă. Prin urmare

$$I = \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = ct .$$

Deci, în regim staționar intensitatea curentului electric este aceeași prin orice secțiune a unui tub de curent.

2.2 Conductivitatea electrică a metalelor

Proprietățile electrice ale metalelor pot fi explicate cu ajutorul modelului gazului electronic. Conform acestuia, electronii de conducție sunt liberi, ei aparțin întregului metal ce constă dintr-o rețea în nodurile căreia sunt ionii pozitivi. Aceștia au o mișcare de vibrație în jurul pozițiilor lor de echilibru.

Când metalul se plasează într-un câmp electric electronii se deplasează în sens contrar sensului intensității câmpului electric. În timpul deplasării electronii se ciocnesc cu ionii din nodurile rețelei (la o ciocnire electronul cedează toată energia pe care o avea înainte de ciocnire). Interacția dintre electroni și ionii pozitivi explică rezistența electrică a metalului. Cu creșterea temperaturii vibrația ionilor pozitivi crește, crescând și numărul de ciocniri între electroni și ionii pozitivi. Se poate explica astfel, creșterea rezistenței electrice a unei probe metalice cu creșterea temperaturii probei.

Distanță parcursă de electroni între două ciocniri consecutive se numește **drum liber mijlociu** și se notează cu λ . Cu scăderea temperaturii drumul liber mijlociu al electronilor crește.

Când metalului nu i se aplică un câmp electric mișcarea electronilor este dezordonată, caracterizată de viteza medie termică u ($m\overline{u^2}/2 = 3kT/2$). Când metalului i se aplică un câmp electric, peste această mișcare de agitație termică se suprapune o mișcare de ansamblu, ordonată, caracterizată de o altă viteză, numită **viteză de drift**, notată cu \bar{v} :

$$\bar{v} = a\tau/2$$

unde τ este timpul mediu între două ciocniri consecutive, iar a este accelerația imprimată electronilor de câmpul electric

$$a = \frac{eE}{m} .$$

Deci

$$\bar{v} = \frac{e\tau}{2m} E = \mu E , \quad (2.8)$$

unde $\mu = e\tau/2m$ se numește **mobilitate**.

În interiorul metalului considerăm o porțiune paralelipipedică cu baza S și lungimea $\bar{v}\tau$. Notăm cu n numărul de electroni din unitatea de volum. Sarcina electrică ce traversează suprafața S în timpul τ este $q = neS\bar{v}\tau$, deci

$$j = \frac{q}{S\tau} = ne\bar{v} = ne\mu E .$$

Așadar, densitatea de curent este proporțională cu intensitatea câmpului electric aplicat metalului. Relația

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} , \quad (2.9)$$

reprezintă expresia locală a legii Ohm. Menționăm că ecuația (2.9) nu este valabilă în cazul semiconductorilor, când σ depinde de câmpul electric aplicat. De asemenea, ea nu este valabilă în cazul câmpurilor electrice ce variază rapid în timp. Constanta de proporționalitate din (2.9)

$$\sigma = ne\mu , \quad (2.10)$$

se numește **conductivitate electrică**. Conductivitatea electrică este un coeficient totdeauna pozitiv, caracteristic materialului (nu depinde de forma conductorului). Inversul conductivității electrice se numește **rezistivitate**

$$\rho = \frac{1}{\sigma} . \quad (2.11)$$

Unitatea SI pentru rezistivitate este $\Omega \cdot m$.

Modelul gazului electronic, bazat pe considerente clasice, are meritul de a putea deduce legea lui Ohm (o lege fundamentală), ce leagă densitatea de curent de intensitatea câmpului electric aplicat metalului. Acest model nu poate da relații cantitative care să fie confirmate de măsurătorile experimentale pentru dependența rezistivității cu temperatura, pentru căldura molară la volum constant C_V (teoria clasică nu poate justifica de ce electronii liberi din conductori nu influențează valoarea lui C_V). De asemenea, modelul clasic al gazului electronic nu poate explica o serie de fenomene cum ar fi supraconductibilitatea, susceptibilitatea paramagnetică a electronilor liberi. Rezultate teoretice în acord cu rezultatele experimentale se obțin utilizând statisticile cuantice.

2.3 Circuite electrice și elemente de circuit

Considerăm un conductor cilindric de secțiune S și lungime l , parcurs de un curent electric continuu I când i se aplică la capete o tensiune electrică U . Experimental s-a constatat că

$$\frac{U}{I} = R = \rho \frac{l}{S} . \quad (2.12)$$

Ținând cont de faptul că lungimea l și secțiunea S a conductorului variază foarte puțin cu temperatura t rezultă că variația rezistenței electrice R cu temperatura este datorată variației rezistivității cu temperatura. Pentru un interval de temperatură nu prea mare, rezistivitatea electrică depinde de temperatură linear

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t) , \quad (2.13)$$

unde ρ_0 este rezistivitatea electrică la temperatura 0°C , ρ rezistivitatea electrică la temperatura t , iar α coeficientul de temperatură al rezistivității. Atât rezistivitatea electrică cât și coeficientul de temperatură sunt mărimi caracteristice substanței. La aliaje valoarea coeficientului de temperatură al rezistivității electrice este mai mică decât la metalele pure ce intră în aliaj. La unele aliaje datorită valorii foarte mici a acestui coeficient, acesta poate fi considerat zero. Există o categorie de substanțe, numite **semiconductori** (germaniul, siliciul și alte elemente din grupele IV, V și VI din tabelul lui Mendeleev) a căror rezistență electrică scade odată cu creșterea temperaturii. Relația

$$I = \frac{U}{R} , \quad (2.14)$$

reprezintă expresia legii lui Ohm pentru o porțiune de circuit. Din relațiile (2.12) rezultă expresia locală a legii lui Ohm

$$j = \frac{I}{S} = \frac{U}{RS} = \frac{E l}{\rho \frac{l}{S} S} = \frac{1}{\rho} E = \sigma E .$$

Legea lui Ohm pentru o porțiune de circuit poate fi extinsă și pentru un circuit ce conține un generator de tensiune electromotoare (t.e.m.) E și rezistență interioară r , înseriat cu un consumator electric de rezistență R :

$$I = \frac{E}{R + r} . \quad (2.15)$$

Deci, intensitatea curentului electric printr-un circuit electric simplu este direct proporțională cu t.e.m. a sursei din circuit și invers proporțională cu rezistența totală a circuitului.

Energia pe care o pierde electronii în ciocnirile cu nodurile rețelei cristaline determină creșterea energiei interne a rețelei și deci încălzirea și creșterea temperaturii

acesteia. Acest efect termodinamic, ireversibil, se numește **efect Joule**. Energia disipată prin efect Joule în timpul t prin conductorul de rezistență electrică R este

$$W = I^2 R t . \quad (2.16)$$

Densitatea de energie are expresia

$$w = \frac{W}{V} = \frac{j^2 S^2 R t}{S l t} = \sigma E^2 .$$

Relația

$$w = \sigma E^2 , \quad (2.17)$$

reprezintă expresia locală a legii lui Joule.

2.3.1 Legile lui Kirchhoff

Circuitele electrice cu mai multe ramificații prin care circulă curenți electrici de diverse intensități se numesc rețele electrice. O rețea electrică este constituită din următoarele elemente: i) nodul de rețea, ii) latura (ramura) rețelei și iii) ochiul de rețea. Nodul de rețea este orice punct al rețelei în care se întâlnesc cel puțin trei consumatori (într-o rețea electrică nodul are proprietatea de a diviza curentul electric). Ramura rețelei reprezintă porțiunea de rețea cuprinsă între două noduri. Ochiul de rețea este conturul poligonal închis ce conține consumatorii și sursele de pe laturile ce formează conturul poligonal respectiv.

Prima lege a lui Kirchhoff afirmă că :**suma algebrică a intensităților curenților electrici care se întâlnesc într-un nod de rețea este egală cu zero**

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 , \quad (2.18)$$

unde n este numărul de laturi ce se întâlnesc în nodul de rețea considerat. Prin convenție orice curent care intră în nodul de rețea este pozitiv, iar cei care ies sunt negativi.

Această lege este o altă formă a legii conservării sarcinii electrice; cantitatea de electricitate care intră într-un nod de rețea este egală cu cea care iese din nodul respectiv.

Prin aplicarea primei legi a lui Kirchhoff pentru cele n noduri ale rețelei electrice se obțin n ecuații, dintre care $n - 1$ sunt independente.

Legea a doua a lui Kirchhoff afirmă că **suma algebrică a t.e.m. a surselor conținute într-un ochi de rețea este egală cu suma algebrică a căderilor de**

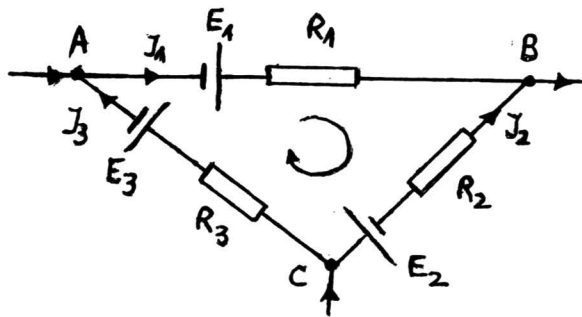


Figura 2.1:

tensiune pe fiecare latură a ochiului (produsele dintre intensitatea curentului electric și rezistența totală pentru fiecare ramură)

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{j=1}^m I_j R_j, \quad (2.19)$$

unde n este numărul de surse conținute în ochiul de rețea, iar m este numărul de laturi ale ochiului respectiv.

Pentru ochiul de rețea considerat alegem un sens arbitrar de parcurs. Prin convenție dacă sensul ales pentru parcurgerea ochiului coincide cu sensul ales pentru curentul electric din ramură, atunci produsul IR este pozitiv, în caz contrar este negativ. Prin convenție t.e.m. este pozitivă dacă sensul de parcurs pentru ochi parcurge sursa de la borna negativă la cea pozitivă, în caz contrar este negativă.

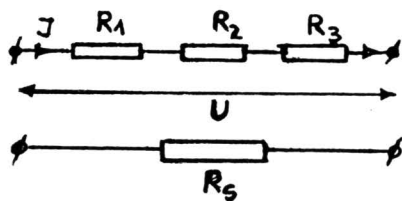
Legea a doua a lui Kirchhoff reprezintă legea conservării energiei pentru circuitele electrice.

Cu ajutorul acestei legi se obțin ecuații numai pentru ochiurile independente. Pentru ochiul de rețea reprezentat în Fig. 2.1 putem scrie

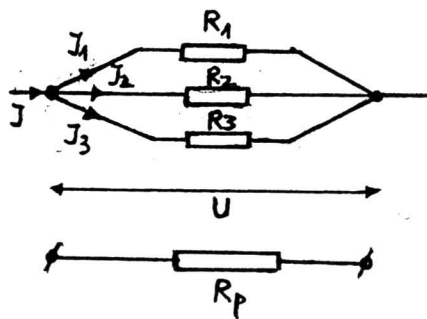
$$E_1 + E_2 - E_3 = I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3.$$

În continuare vom considera câteva scheme electrice cu rezistori. Cele mai simple combinații ce se pot realiza cu mai mulți rezistori (de rezistență electrică cunoscută) dați sunt gruparea serie și paralel. Gruparea se poate înlocui cu un rezistor echivalent, care determină aceeași cădere de tensiune între aceleași două puncte ca și gruparea înlocuită.

Considerăm conexiunea serie reprezentată în Fig. 2.2. Fie U căderea de tensiune între capetele grupării, U_1 , U_2 , U_3 căderile de tensiune pe fiecare rezistor al grupării, iar I intensitatea curentului electric ce parcurge gruparea. Conform legii lui Ohm, căderile



2.2



2.3

Figura 2.2 & 2.3

de tensiune pe fiecare rezistor au expresiile: $U = IR$, $U_1 = IR_1$, $U_2 = IR_2$ și $U_3 = IR_3$. Căderea de tensiune între capetele grupării este egală cu suma căderilor de tensiune de pe fiecare rezistor din grupare $U = U_1 + U_2 + U_3$, deci $R = R_1 + R_2 + R_3$. Generalizând ultima expresie pentru un număr n de rezistori obținem pentru rezistența echivalentă R_s a grupării serie expresia

$$R_s = \sum_{i=1}^n R_i . \quad (2.20)$$

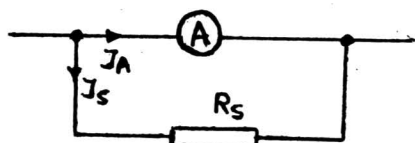
Considerăm conexiunea paralel reprezentată în Fig. 2.3. Fie I intensitatea curentului electric ce parcurge gruparea, I_1 , I_2 , I_3 intensitățile curentului electric pe fiecare ramură, iar U căderea de tensiune între capetele grupării. Conform legii lui Ohm, putem scrie: $I = U/R$, $I_1 = U/R_1$, $I_2 = U/R_2$ și $I_3 = U/R_3$. Aplicând prima lege a lui Kirchhoff $I = I_1 + I_2 + I_3$ rezultă că $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$. Generalizând ultima expresie pentru un număr n de rezistori obținem pentru rezistența echivalentă R_p a grupării paralel expresia

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} . \quad (2.21)$$

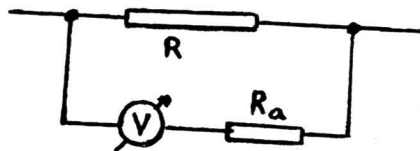
În practică pentru măsurarea unor curenți electrici a căror valoare depășește scala ampermetrului se conectează (vezi Fig. 2.4) în paralel cu rezistența internă a aparatului o rezistență numită **rezistență sunt** a cărei valoare R_s este

$$R_s = \frac{R_A}{n - 1} , \quad (2.22)$$

unde R_A este rezistența internă a ampermetrului, iar $n = I/I_A$ arată de câte ori este mai mare curentul I măsurat decât valoarea scalei ampermetrului I_A . Aplicând cele două legi ale lui Kirchhoff pentru schema din Fig. 2.4 ($I = I_A + I_s$ și $I_A R_A = I_s R_s$) obținem relația (2.22).



2.4



2.5

Figura 2.4. & 2.5

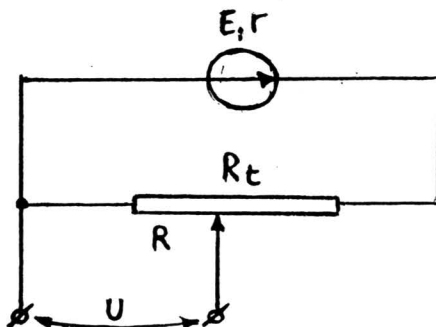


Figura 2.6:

Pentru măsurarea unor tensiuni electrice a căror valoare depășește scala voltmetrului se conectează (vezi Fig. 2.5) în serie cu rezistența internă a aparatului o rezistență numită **rezistență adițională** a cărei valoare R_a este

$$R_a = R_V(n - 1) , \quad (2.23)$$

unde R_V este rezistența internă a voltmetrului, iar $n = U/U_V$ arată de câte ori este mai mare tensiunea electrică U măsurată decât valoarea scalei voltmetrului U_V . Pentru schema din Fig. 2.5 putem scrie $U = U_V + U_a$ unde $U = nU_V$ și $U_V/R_V = U_a/R_a$. În urma înlocuirilor se obține relația (2.23).

În practică când se dorește utilizarea unei tensiuni electrice a cărei valoare să fie mai mică decât cea de la bornele sursei se utilizează un **divizor de tensiune**, reprezentat în Fig. 2.6. Aplicând legea lui Ohm putem scrie $E = I(R_t + r)$ unde E este t.e.m. a sursei, r este rezistența ei internă, iar R_t este rezistența totală a reostatului și $U = IR$, cu R ($R < R_t$) rezistența porțiunii din reostat de pe care se culege tensiunea electrică $U < E - Ir = IR_t$. Deci tensiunea electrică U are expresia

$$U = \frac{E}{R_t + r} R . \quad (2.24)$$

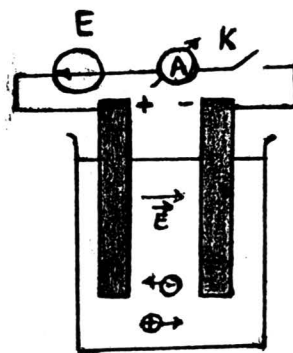


Figura 2.7:

2.4 Curentul electric în electroliți

Electronii nu sunt singurii purtători liberi de sarcină electrică. În soluțiile apoase de săruri sau în topiturile oxizilor metalici există ioni liberi pozitivi și negativi. Sub acțiunea unui câmp electric extern acești ioni execută o mișcare dirijată, deci apare un curent electric. Substanțele ionice disociate (soluțiile apoase sau topiturile oxizilor metalici) se numesc **electroliți**.

Procesul de separare (în absența câmpului electric) a substanțelor ionice în ioni pozitivi și negativi poartă numele de **disociație electronică**. Efectul disociației constă în obținerea unui amestec de ioni negativi și pozitivi într-o soluție, în care aceștia se mișcă haotic.

Considerăm montajul reprezentat în Fig. 2.7. La închiderea întrerupătorului K ionii negativi se orientează către electrodul pozitiv al sursei, numit **anod**, iar cei pozitivi se orientează către electrodul negativ, numit **catod**. Se realizează astfel mișcarea dirijată a purtătorilor de sarcină electrică (ioni) care determină un curent electric. Datorită acestui curent la catodul sursei se depune substanță. Procesul de dirijare a ionilor către electrozi și transformarea lor în atomi sau radicali (prin neutralizare) se numește **electroliză**.

În cazul oricărui proces de electroliză sunt valabile următoarele două legi. Prima lege a electrolizei enunțată de Faraday în anul 1883 afirmă că **masa de substanță m separată dintr-un electrolit este proporțională cu sarcina electrică $Q = It$ transportată de ioni în timpul electrolizei**

$$m = K I t , \quad (2.25)$$

unde factorul de proporționalitate K se numește **echivalent electrochimic**. Echivalentul electrochimic depinde doar de natura substanței. Legea a doua a electrolizei arată că echivalentul electrochimic este direct proporțional cu masa atomică A a

substanței și invers proporțional cu valența n ei

$$K = \frac{1}{F} \frac{A}{n}, \quad (2.26)$$

unde $F = 96400$ C/echivalent-gram se numește numărul lui Faraday. Echivalentul electrochimic se exprimă în kg/C.

Cu ajutorul legii a doua a lui Faraday se poate determina valoarea sarcinii electronului. Într-un echivalent-gram de substanță sunt N_A/n atomi, unde $N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$ molecule/kmol este numărul lui Avogadro. Acești atomi rezultă prin neutralizarea a N_A/n ioni ce transportă sarcina electrică $N_A q/n = F = 96400$ C. De unde sarcina unui ion este $q = Fn/N_A$. Deci cea mai mică sarcină electrică este sarcina ionului monovalent ($n = 1$) ce coincide cu sarcina electronului (sarcina electrică elementară) și are valoarea

$$q = |e| = \frac{F}{N_A} = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ C}.$$

Considerăm un electrolit în care ionii pozitivi au masa m_+ și sarcina electrică q_+ , iar cei negativi masa m_- și sarcina electrică q_- ($q_+ = |q_-| = q$). Când aplicăm câmpul electric ionii se mișcă accelerat (pe lângă forța electrică ionii sunt supuși unei forțe rezistente proporțională cu viteza ionului respectiv), apoi se atinge un regim staționar când ionul se mișcă rectiliniu uniform (cele două forțe menționate anterior își fac echilibru). Conform principiului al doilea al mecanicii newtoniene putem scrie pentru ionul pozitiv ecuația

$$m_+ a_+ = q_+ E - k_+ v_+,$$

unde $k_+ v_+$ este forța rezistentă ce acționează asupra ionului pozitiv. În regim staționar avem

$$q_+ E = k_+ v_{+,lim},$$

de unde viteza limită (maximă) pe care o atinge ionul pozitiv este $v_{+,lim} = q_+ E/k_+$. Similar pentru ionul negativ obținem $v_{-,lim} = q_- E/k_-$. Densitatea de curent j are două componente j_+ și j_- . Ionii pozitivi se mișcă în sensul câmpului electric aplicat. În sens opus se mișcă un număr egal de ioni negativi. Densitatea de curent j are expresia

$$j = j_+ + j_-,$$

unde

$$j_+ = q n' v_+, \quad j_- = q n' v_-.$$

Dacă notăm cu n' numărul de molecule izolate din unitatea de volum, atunci numărul de molecule dissociate din unitatea de volum (ce coincide cu numărul (n') de perechi

de ioni din unitatea de volum) este $n' = \alpha n'$, unde α este coeficientul de disociere ($0 < \alpha < 1$). Notând cu N' numărul de ioni dintr-un echivalent chimic A/n (deci $F = qN'$) și cu $n'/N' = \eta$ concentrația echivalentă obținem

$$j = \alpha F \eta \left(\frac{q}{k_+} + \frac{q}{k_-} \right) E, \quad (2.27)$$

ce reprezintă forma locală a legii lui Ohm pentru un electrolit unde $\sigma = \alpha F \eta (q/k_+ + q/k_-)$.

2.5 Aplicații

2.1. Un disc izolator de rază R are pe suprafață densitatea superficială de sarcină electrică σ . Discul se rotește cu viteza unghiulară ω . Să se găsească intensitatea curentului electric.

R: Pe discul de rază R , se consideră un element infinitesimal de grosime dr , aflat la distanța r de centru, ce are suprafața

$$dS = 2\pi r \cdot dr.$$

Sarcina electrică elementară de pe suprafața dS este

$$dq = \sigma dS = 2\pi r \sigma \cdot dr.$$

Curentul electric produs prin rotirea sarcinii electrice dq este

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi} = \omega r \sigma \cdot dr.$$

Intensitatea curentului electric total are expresia

$$I = \omega \sigma \int_0^R r \cdot dr = \frac{\omega \sigma R^2}{2}.$$

2.2. Se consideră conductorul metalic de lungime l și rezistivitate ρ reprezentat în Fig. 2.8. El are forma unui trunchi de con de raze r_1 și r_2 ($r_1 < r_2$). Să se determine rezistența electrică a conductorului, între punctele A și B.

R: Se consideră rezistorul elementar de lungime dx și secțiune πr^2 . Rezistența sa electrică este

$$dR = \rho \frac{dx}{\pi r^2}. \quad (2.28)$$

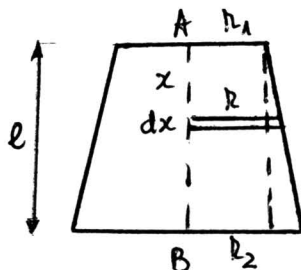


Figura 2.8:

Conform figurii 2.8 avem $(r - r_1)/(r_2 - r_1) = x/l$, de unde $dx = l dr/(r_2 - r_1)$. Relația (2.28) scrisă cu variabila r este $dR = \rho l dr/[\pi r^2(r_2 - r_1)]$. Între punctele A și B rezistorii elementari sunt grupați în serie. Prin urmare, rezistența electrică a conductorului considerat, între punctele A și B, este

$$R = \frac{\rho l}{\pi(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho l}{\pi r_1 r_2}.$$

2.3. Spațiul dintre două sfere metalice concentrice de raze r_1 și r_2 ($r_2 > r_1$) este umplut cu un mediu conductor de rezistivitate ρ . Care este rezistența electrică măsurată între fața interioară și exterioară? Cât devine această rezistență când raza exterioară tinde la infinit? Dacă între cele două sfere se stabilește o diferență de potențial constantă $V_2 - V_1$, care este intensitatea curentului electric ce trece prin mediul conductor?

R: Considerăm o pătură sferică de rază r ($r_1 < r < r_2$) și grosime dr . Rezistența electrică între fața interioară și exterioară a păturii sferice este

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}.$$

Stratul conductor ce umple spațiul dintre cele două sfere metalice de raze r_1 și r_2 este echivalent cu o grupare serie de rezistori elementari. Deci rezistența electrică a acestui strat măsurată între fața interioară și exterioară este

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho}{4\pi r^2} dr = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

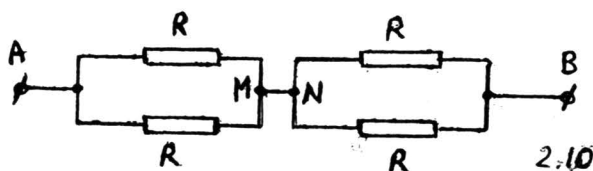
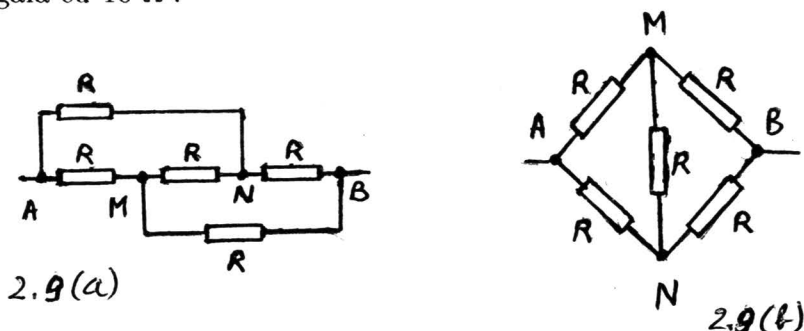
Când raza exterioară tinde la infinit, această rezistență devine

$$R' = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\rho}{4\pi r_1}.$$

Conform legii lui Ohm, intensitatea curentului electric ce trece prin mediul conductor

$$I = \frac{V_2 - V_1}{R} = \frac{4\pi r_1 r_2 (V_2 - V_1)}{\rho(r_2 - r_1)}.$$

2.4. Care este rezistența electrică echivalentă între bornele A și B ale circuitelor electrice din Fig. 2.9 (a) și Fig. 2.9 (b)? Se presupune că rezistența electrică a fiecărui rezistor este egală cu 10Ω .



R: Potențiale electrice ale punctelor M și N sunt egale. Schema electrică echivalentă este aceeași pentru cele două grupări și este reprezentată în Fig. 2.10. Deci, cele două circuite electrice au aceeași rezistență electrică echivalentă între bornele A și B , egală cu $R = 10 \Omega$.

2.5. Un încălzitor electric are două rezistoare. Timpul de fierbere a cantității de apă din încălzitor este t_1 , respectiv t_2 , după cum se conectează numai primul sau al doilea. Să se calculeze timpul de fierbere al apei dacă se conectează ambele rezistoare i) în serie, ii) în paralel.

RR: i) $t_s = t_1 + t_2$, ii) $t_p = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$.

2.6. Fie circuitul electric din Fig. 2. 11. Să se calculeze: i) tensiunea electrică U dintre noduri, ii) tensiunea electrică U_0 la bornele surselor la funcționarea în gol ($R \rightarrow \infty$), iii) intensitatea curentului electric I_{sc} la funcționarea în scurtcircuit

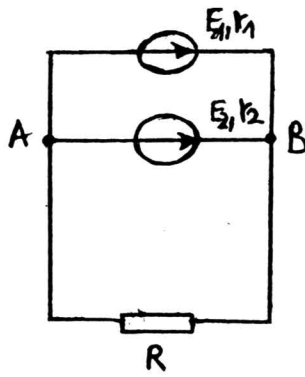


Figura 2.11

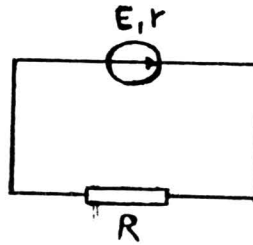


Figura 2.12

($R = 0$). Să se generalizeze expresia de la punctul i).

RR: i) $U = \frac{R(r_2 E_1 + r_1 E_2)}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}$, ii) $U_0 = \frac{r_2 E_1 + r_1 E_2}{r_1 + r_2}$, iii) $I_{sc} = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}$,

iv) $U = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{r_i}}{\frac{1}{R} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}}$.

2.7. Să se demonstreze că o sursă cu t.e.m. E și rezistența internă r , transmite putere maximă $P_{R,max}$ în circuitul exterior când rezistența electrică a circuitului exterior R este egală cu rezistența internă r (vezi Fig. 2.12). Să se calculeze randamentul transmisiei.

R: Puterea sursei (puterea totală a circuitului) este

$$P = IE = \frac{E^2}{R + r}.$$

Când $R = 0$ avem $P_{max} = E^2/r$, iar la funcționarea în gol puterea sursei este nulă ($P \rightarrow 0$). Puterea transmisă în circuitul exterior (disipată prin efect Joule prin R)

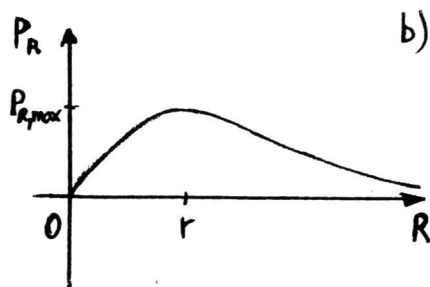
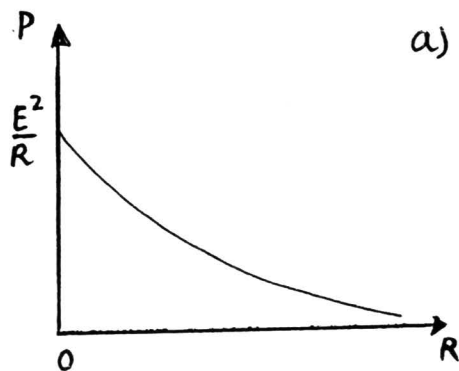


Figura 2.13

este

$$P_R = I^2 R = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}.$$

Pentru $R = 0$ și $R \rightarrow \infty$ această putere este zero. Pentru a determina valoarea maximă a acestei puteri punem condiția

$$\frac{dP_R}{dR} = 0,$$

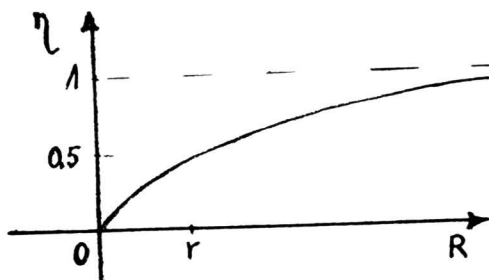
de unde obținem ecuația $R + r - 2R = 0$, ce are soluția $R = r$. Valoarea maximă a acestei puteri este

$$P_{R,max} = \frac{E^2}{4r} = \frac{P_{max}}{4}.$$

Dependența de R a celor două puteri P și P_R este reprezentată în Fig. 2.13 (a) și 2.13 (b). Randamentul transmisiei este

$$\eta = \frac{P_R}{P} = \frac{R}{R + r}.$$

Dependența lui η de R este reprezentată în Fig. 2.14



2.14

Capitolul 3

Legile fundamentale ale magnetostaticii. Interacții electromagnetice

În spațiul din jurul unui magnet sau a unui conductor prin care trece curent electric există câmp magnetic. Acesta orientează acul magnetic, acționează asupra unui conductor prin care trece curent electric sau asupra unei sarcini electrice în mișcare.

Câmpul magnetic este descris de mărimea fizică vectorială numită inducția câmpului magnetic sau **inducția magnetică**. Direcția inducției magnetice este dată de tangenta la liniile de câmp magnetic. Numărul acestor linii pe unitatea de suprafață este proporțional cu mărimea inducției magnetice. Astfel, zona în care liniile sunt mai dese inducția magnetică este mai mare, iar cea în care liniile de câmp sunt rare inducția magnetică este mică. *Liniile de câmp magnetic sunt curbe închise.*

Fluxul inducției magnetice prin suprafața dS este

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} dS, \quad (3.1)$$

unde \vec{n} reprezintă ^{versorul} normalii la suprafața dS ($d\vec{S} = \vec{n} dS$).

Fluxul inducției magnetice printr-o suprafață închisă S este nul

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0,$$

deci

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.2)$$

Prin urmare câmpul magnetic este **solenoidal**. El este un câmp **fără surse**.

Pentru un câmp magnetic uniform ce străbate o suprafață S , fluxul magnetic se definește prin produsul dintre modulul inducției magnetice și aria suprafeței normale

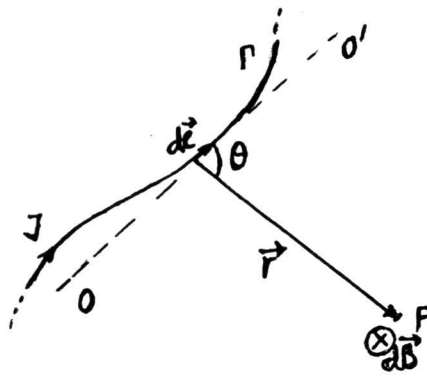


Figura 3.1:

la direcția câmpului magnetic

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS_n = BS \cos \alpha ,$$

unde α este unghiul pe care îl face normala la suprafața S , deci și \vec{n} cu direcția vectorului \vec{B} .

Unitatea de măsură a fluxului magnetic în SI se numește weber, cu simbolul Wb. Un Wb este fluxul magnetic al unui câmp magnetic uniform, de inducție magnetică egală cu 1 T, printr-o suprafață de 1 m², așezată normal pe direcția câmpului magnetic.

3.1 Legea lui Biot-Savart

Legea lui Biot-Savart ne dă valoarea și orientarea câmpului magnetic generat de elementul de curent $I d\vec{l}$ într-un punct P situat la distanța r de elementul de curent (vezi Fig. 3.1) *(de lungime dl , parcurs de un curent de intensitate I)*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} . \quad (3.3)$$

Inducția magnetică totală creată de curentul electric în punctul P este

$$\vec{B} = \int_{\Gamma} d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} . \quad (3.4)$$

Conform legii Biot-Savart (3.3), mărimea lui $d\vec{B}$ este

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2} , \quad (3.5)$$

unde θ este unghiul dintre elementul de circuit $d\vec{l}$ și vectorul de poziție \vec{r} .

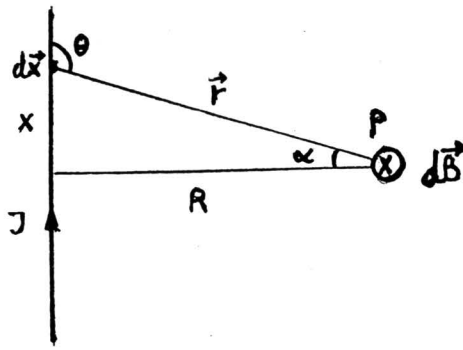


Figura 3.2:

3.1.1 Conductor rectiliniu de lungime infinită

Fie conductorul rectiliniu, de lungime infinită, reprezentat în Fig. 3.2, ce este parcurs de curentul electric I . Considerăm elementul de lungime dx situat la distanța x de piciorul perpendiculararei (de lungime R) dusă din punctul P în care calculăm câmpul magnetic. Notăm cu θ unghiul dintre vectorii \vec{r} și $d\vec{x}$. Aplicând legea lui Biot-Savart (3.3) elementului de curent $I dx$ avem

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2}, \quad (3.6)$$

Variabilele x , r și θ nu sunt independente. Conform Fig. 3.2 relațiile dintre ele sunt

$$r^2 = x^2 + R^2, \quad r = R / \sin \theta, \quad x/r = \cos(\pi - \theta),$$

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}; \quad x/R = -\operatorname{ctg} \theta, \quad dx = \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta.$$

Inducția magnetică totală este

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R^2 + x^2 - x^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} dx. \quad (3.7)$$

Integrandul se poate scrie ca

$$\frac{\sqrt{R^2 + x^2} - \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + R^2}}}{x^2 + R^2} = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)'$$

Relația (3.7) devine

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

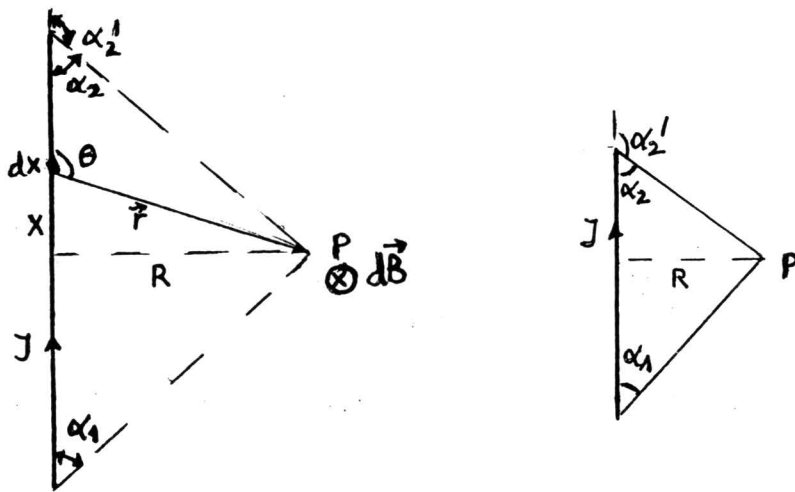


Figura 3.3:

Inducția magnetică totală $B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \theta}{r^2} dx$ se poate determina de asemenea folosind variabila θ .
 Integrala $J = \int (\sin \theta / r^2) dx$ se poate calcula ușor folosind variabila θ ; deoarece

$$J = \frac{1}{R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\frac{\cos \theta}{R} \Big|_0^\pi = \frac{2}{R} . \quad dx = \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta \text{ și } r = \frac{R}{\sin \theta} \quad (3.8)$$

Deci

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} . \quad (3.9)$$

Expresia (3.9) (pentru inducția câmpului magnetic produs de curentul electric ce trece printr-un conductor rectiliniu de lungime infinită) este în acord cu experiența: câmpul magnetic este mai intens în punctele situate mai aproape de conductor.

Liniile câmpului magnetic sunt cercuri concentrice, conductorul rectiliniu trecând prin centrul lor. Inducția magnetică într-un punct este tangentă la linia de câmp ce trece prin acest punct.

Sensul lui \vec{B} poate fi determinat cu ajutorul regulii mâinii drepte: se înconjură conductorul cu mâna dreaptă astfel încât degetul mare să indice sensul curentului. Sensul degetelor alipite indică sensul lui \vec{B} .

3.1.2 Conductor rectiliniu de lungime finită

Fie α_1 și α'_2 unghiurile sub care se văd capetele conductorului (vezi Fig. 3.3). În integrala (3.8) se înlocuiesc limitele de integrare 0 și π cu α_1 și α'_2 , deci

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha'_2) . \quad (3.10)$$

Ținând cont că $\cos \alpha'_2 = \cos(\pi - \alpha_2) = -\cos \alpha_2$ relația de mai sus devine

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) . \quad (3.11)$$

3.1.3 Spiră circulară

Fie o spiră circulară de rază R prin care trece curentul I (vezi Fig. 3.4). Unghiul dintre vectorii $d\vec{l}$ și \vec{r} este $\pi/2$, (conform teoremei celor trei perpendiculare). În acest caz legea lui Biot-Savart se scrie

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} .$$

Componentele dB_{\perp} , corespunzătoare elementelor dl situate diametral opus pe circumferința circulară se anulează reciproc. Inducția magnetică totală este

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \cdot \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl .$$

Deci

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} . \quad (3.12)$$

Inducția magnetică în centrul spirei parcurse de curentul staționar I este dată de (3.12) pentru $x = 0$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} . \quad (3.13)$$

Pentru $x \gg R$ din (3.12) obținem

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} . \quad (3.14)$$

3.2 Legea lui Ampère

Relația cantitativă între curentul electric I ce trece prin suprafața limitată de conturul închis Γ și inducția \vec{B} a câmpului magnetic generat de acest curent este dată de

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I . \quad (3.15)$$

Conturul Γ se împarte în elemente infinitesimale $d\vec{l}$. Integrala din primul membru al relației (3.15) reprezintă suma cantităților $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ pentru toate elementele conturului închis (vezi Fig. 3.5 (a)).

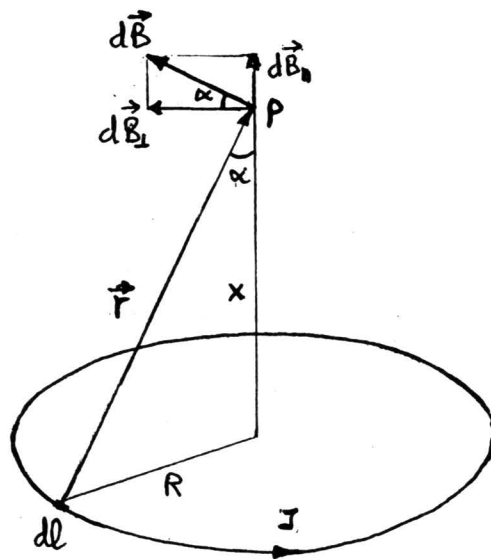


Figura 3.4:

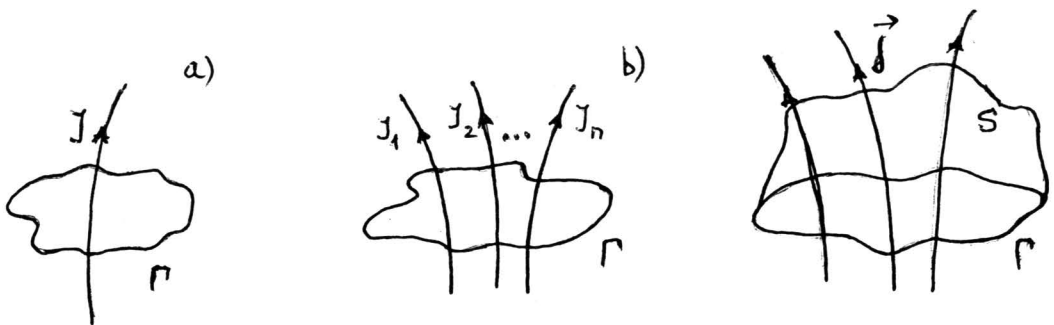


Figura 3.5:

Dacă prin suprafața ~~ce se sprijină pe~~ conturul Γ nu trece curent electric integrala $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ este nulă.

Relația (3.15) este cunoscută sub numele de legea lui Ampère. Această lege este valabilă pentru orice configurație de câmp magnetic, pentru orice contur de integrare și pentru orice ansamblu de curenți electrici.

Dacă prin suprafața ~~ce se sprijină pe~~ conturul închis Γ trec N curenți electrici, ecuația (3.15) devine

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i, \quad (3.16)$$

adică **circulația inducției magnetice pe un contur închis Γ este egală cu produsul dintre permeabilitatea magnetică a vidului și suma algebrică a curenților ce trec prin suprafața ce se sprijină pe conturul Γ** (vezi Fig. 3.5 (b)).

Curentul electric ce străbate suprafața ~~S mărginită~~ de conturul închis Γ se poate scrie în funcție de densitatea de curent \vec{j} astfel

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Deci relația (3.15) devine

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (3.17)$$

Relația (3.17) exprimă că, circulația inducției magnetice pe un contur închis Γ este egală cu produsul dintre constanta universală μ_0 și ~~$\oint(\text{vxl})$~~ ^{vectorsului} densitate de curent **prin** suprafața ~~ce se sprijină~~ cu marginea pe conturul de integrare Γ (vezi Fig. 3.5 (c)).

Aplicând teorema lui Stokes integralei curbilinii din primul membru al ecuației (3.17)

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

obținem

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (3.18)$$

Pentru o densitate de curent \vec{j} dată, relația (3.15) nu este suficientă pentru determinarea câmpului magnetic \vec{B} , deoarece câmpuri vectoriale diferite pot avea același rotor.

Câmpul magnetic \vec{B} este determinat univoc pentru un \vec{j} dat, de următoarele două ecuații

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}, \\ \text{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

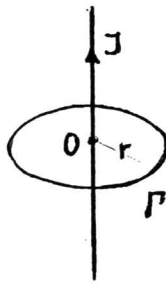


Figura 3.6:

3.2.1 Conductor rectiliniu de lungime infinită

Fie un conductor rectiliniu, de lungime infinită, parcurs de curentul electric I . Alegem drept contur de integrare, cercul de rază r centrat pe conductor (vezi Fig. 3.6). Deoarece inducția magnetică \vec{B} are aceeași valoare în orice punct de pe conturul de integrare relația (3.15) se scrie în acest caz

$$B \oint_{\Gamma} dl = \mu_0 I .$$

Dar $\oint_{\Gamma} dl = 2\pi r$, deci

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} . \quad (3.19)$$

3.3 Acțiunea câmpului magnetic asupra unui conductor parcurs de un curent electric

Câmpul magnetic de inducție \vec{B} acționează asupra unui element de ^{curent de lungime dl} parcurs de un curent electric I cu o forță a cărei expresie matematică este

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} , \quad (3.20)$$

Integrând această formulă găsim forța \vec{F} ce acționează asupra conductorului nelinear. Forța electromagnetică (3.20) are modulul $dF = I dl B \sin \alpha$, unde α este unghiul dintre vectorul $d\vec{l}$ și direcția vectorului inducție magnetică. Sensul forței electromagnetice se află cu regula burghiului. Pentru un conductor rectiliniu relația (3.20) se scrie $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$.

În cazul particular, în care liniile de câmp magnetic sunt perpendiculare pe conductorul rectiliniu, sensul forței electromagnetice se determină cu regula mâinii stângi: se așează mâina stângă deschisă astfel încât degetele alipite să indice sensul curentului electric, iar liniile de câmp să întepie palma. Degetul mare indică sensul forței electromagnetice.

Relația $F = IlB$ este folosită la definirea mărimii fizice inducția magnetică, precum și a unității sale de măsură. Inducția unui câmp magnetic uniform este o mărime fizică vectorială, al cărei modul este egal cu raportul dintre forța cu care acel câmp magnetic acționează asupra unui conductor rectiliniu, așezat perpendicular pe liniile câmpului magnetic și produsul dintre intensitatea curentului electric prin conductor și lungimea conductorului aflat în câmp.

Unitatea de măsură a inducției magnetice în SI se numește tesla, cu simbolul T . Un tesla este inducția unui câmp magnetic care exercită o forță de 1 N asupra fiecărui ^{rectiliniu} m din lungimea unui conductor așezat perpendicular pe liniile de câmp și parcurs de un curent de intensitate 1 A.

3.4 Interacțiunea magnetică a curenților electrici

Experimental s-a constatat că două circuite electrice parcurse de curenți electrici interacționează între ele prin câmpurile magnetice ce apar în jurul lor. Asupra fiecărui circuit va acționa câmpul magnetic al celuilalt circuit (prin forța electromagnetică). Dacă circuitul este mobil, el se va deplasa sub acțiunea forței electromagnetice.

Vom considera două conductoare rectilinii, paralele, parcurse de curenți electrici de același sens, vezi Fig. 3.7. Conductorul rectiliniu parcurs de curentul electric I_1 produce în jurul său un câmp magnetic. La distanța r de el (unde se află cel de-al doilea conductor) inducția magnetică (dată de relația (3.19)) are valoarea

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu_r I_1}{2\pi r},$$

unde μ_r este permeabilitatea magnetică relativă a mediului în care se găsesc conductorii ($\mu = \mu_0 \mu_r$ unde μ este permeabilitatea magnetică a mediului respectiv).

Cel de-al doilea conductor rectiliniu, paralel cu primul, parcurs de curentul electric I_2 , va fi acționat de forța electromagnetică \vec{F}_2 :

$$F_2 = B_1 I_2 l = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2 l}{2\pi r}. \quad (3.21)$$

La rândul său, al doilea conductor parcurs de curentul electric I_2 produce și el în jurul său un câmp magnetic, în care se găsește primul conductor. Rezultă că și primul conductor va fi acționat de o forță electromagnetică (\vec{F}_1) dată de

$$F_1 = B_2 I_1 l = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2 l}{2\pi r}. \quad (3.22)$$

Se constată că dacă cele două conductoare ^{rectiliniu} paralele sunt parcurse de curenți electrici de același sens, ele se atrag, iar dacă sunt parcurse de curenți electrici de sensuri opuse se resping.

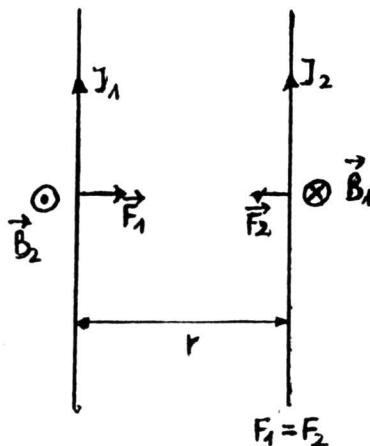


Figura 3.7:

Conform (3.21) și (3.22), forța electromagnetică exercitată de un conductor rectiliniu parcurs de un curent electric, asupra unei porțiuni de lungime l dintr-un alt conductor rectiliniu parcurs de un curent electric, depinde direct proporțional de intensitățile curenților electrici prin cele două conductoare, de lungimea l și invers proporțional de distanța dintre conductoare.

Utilizând expresia (3.21) a forței de interacțiune dintre curenții electrici ce trec prin doi conductori rectilinii, de lungime infinită și paraleli, se poate defini amperul, unitatea SI de măsură a intensității curentului electric. Considerând că cele două conductoare sunt în vid ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$) la distanța de 1 m unul de altul ($r = 1 \text{ m}$) și sunt străbătute de curenți egali ($I = I_1 = I_2$) rezultă

$$I^2 = \frac{1}{2 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{F}{l} \left(\frac{\text{A}^2 \text{m}}{\text{N}} \right).$$

Pentru $F/l = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$ se obține $I^2 = 1 \text{ A}^2$.

Prin definiție, un amper este intensitatea unui curent electric constant, ce trece prin două conductoare rectilinii, paralele, foarte lungi, așezate în vid la distanța de 1 m unul de altul, între care se exercită o forță de $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ pe fiecare metru de lungime.

3.5 Acțiunea câmpului magnetic asupra unei sarcini electrice în mișcare

Asupra oricărui purtător de sarcină electrică în mișcare într-un câmp magnetic se exercită o forță. Expresia acestei forțe poate fi dedusă din expresia forței electromag-

netice. Considerăm un conductor de lungime dl , parcurs de curentul I și care este aflat în câmpul magnetic de inducție B . Forța care acționează asupra lui este

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (3.23)$$

unde $I = \vec{j} \cdot \vec{S}$, cu \vec{j} densitatea de curent, iar S secțiunea traversată de curentul electric. Forța (3.23) este rezultanta forțelor care acționează asupra sarcinilor electrice în mișcare prin conductorul dat. Dacă notăm cu n numărul de electroni liberi din unitatea de volum și cu \vec{v} viteza lor medie, densitatea de curent se scrie $\vec{j} = ne\vec{v}$, deci $I = nevS$ iar $dF = nevS dl B \sin \alpha = ne dV vB \sin \alpha$, unde $dV = dl \cdot S$ este volumul conductorului, iar α unghiul dintre direcția inducției magnetice \vec{B} și conductor (deci și a vitezei \vec{v}). Relația (3.23) devine

$$d\vec{F} = ne dV (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Deoarece $n dV$ est numărul total de electroni liberi din volumul dV , forța care acționează asupra unui singur electron este

$$\vec{F} = e (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.24)$$

Dacă prin elementul de circuit nu trece curent electric, electronii vor avea o mișcare dezordonată și rezultanta forțelor (3.24) va fi nulă. Această rezultantă va diferi de zero numai în cazul în care există o componentă ordonată a vitezei electronilor, deci în cazul unui curent electric.

Studiul experimental al mișcării sarcinilor electrice în câmp magnetic arată că asupra unei sarcini electrice q în mișcare (nu numai asupra electronilor) acționează forța

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.25)$$

Forța \vec{F} este perpendiculară atât pe câmpul magnetic (\vec{B}) cât și pe viteza (\vec{v}) sarcinii electrice.

Intr-un câmp electric \vec{E} asupra sarcinii q va acționa o forță $\vec{F} = q\vec{E}$. Rezultă că într-un câmp electromagnetic asupra sarcinii q va acționa forța

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.26)$$

3.6 Mișcarea unei sarcini electrice în câmp magnetic

Considerăm o particulă de masă m și sarcină q ce are viteza \vec{v} normală la liniile unui câmp magnetic omogen de inducție \vec{B} . Câmpul magnetic acționează asupra particulei cu forța

$$f = qvB, \quad (3.27)$$

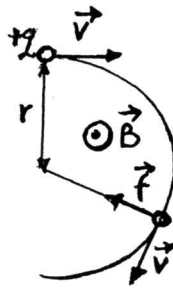


Figura 3.8:

perpendiculară pe viteza \vec{v} (Fig. 3.8). Fiind perpendiculară pe viteza particulei, forța (3.27) nu efectuează lucru mecanic, deci nu modifică energia cinetică a particulei. Ea modifică numai orientarea vitezei, deci acționează ca o forță centripetă (modulul vitezei rămânând neschimbat). Particula va executa o mișcare circulară uniformă, într-un plan normal la liniile de câmp magnetic.

Raza traiectoriei R se determină egalând expresia forței cu care câmpul magnetic acționează asupra sarcinii electrice, cu expresia forței centripete

$$qvB = \frac{mv^2}{R}.$$

Deci

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (3.28)$$

Viteza unghiulară a particulei este $\omega = v/R = qB/m$ iar frecvența mișcării circulare în câmp magnetic

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}.$$

Pentru un câmp magnetic uniform frecvența mișcării este specifică particulei (depinde de raportul q/m numit sarcină specifică) și este independent de viteza particulei. Dacă viteza particulei crește, ea va descrie un cerc de rază mai mare, dar timpul necesar pentru parcurgerea unei circumferințe rămâne constant.

3.7 Aplicații

3.1. Folosind legea lui Ampère determinați expresia inducției magnetice la distanța r de centrul unui conductor cilindric de lungime infinită și de rază R , unde

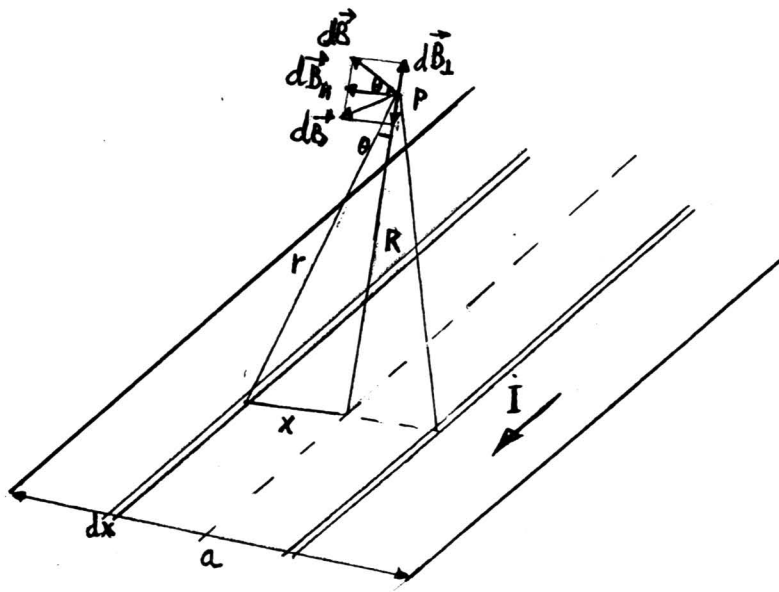


Figura 3.9:

$r < R$. Conductorul este străbătut de curentul I_0 , distribuit uniform pe toată secțiunea conductorului.

R: Alegem drept contur de integrare cercul de rază $r < R$ concentric cu cercul de rază R . Curentul ce străbate secțiunea de rază r este

$$I_0 \cdot \frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$

Legea lui Ampère se scrie

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 \frac{r^2}{R^2},$$

de unde

$$B = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2}. \quad (3.29)$$

La suprafața conductorului ($r = R$) ecuația (3.29) devine identică cu (3.19) pentru $r = R$.

3.2. Determinați câmpul magnetic produs de curentul I ce trece printr-o bandă metalică nemagnetică de lățime a , într-un punct situat pe normala la bandă, la distanța R de centrul ei (vezi Fig. 3.9).

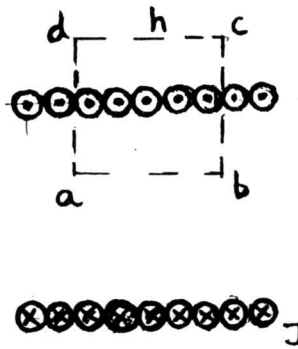


Figura 3.10:

R: Fie un element infinitesimal al benzii de grosime dx situat la distanța x de centrul ei. Acest element prin care trece curentul $dI = I \cdot dx/a$ poate fi considerat un conductor rectiliniu lung. Câmpul magnetic creat de el este

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{dx}{a}.$$

Inducția magnetică $d\vec{B}$ poate fi descompusă în două componente dB_{\parallel} și dB_{\perp} . Componentele dB_{\perp} datorate elementelor dx situate simetric față de centrul benzii se anulează reciproc. Inducția magnetică rezultantă este datorată doar contribuțiilor

$$dB_{\parallel} = dB \cdot \cos \theta.$$

Din figură observăm că $\cos \theta = R/r$ și $x = R \operatorname{tg} \theta$. Deci

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} d\theta.$$

Inducția magnetică rezultantă este

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_{-\arctg(a/2R)}^{\arctg(a/2R)} d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \arctg \frac{a}{2R}.$$

3.3. Folosind legea lui Ampère determinați câmpul magnetic în interiorul unei bobine toroidale de rază medie r și având N spire.

R: Alegem drept contur de integrare un cerc de rază r concentric torului. Curentul electric ce străbate suprafața limitată de conturul de integrare este NI . Legea lui Ampère se scrie

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI,$$

deci

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} . \quad (3.30)$$

3.4. Folosind legea lui Ampère determinați câmpul magnetic în interiorul unui solenoid de lungime L și având N spire. Se ține cont că în cazul unui solenoid a cărui lungime este mult mai mare decât diametrul, câmpul magnetic în exterior este nul.

R: Alegem un contur de integrare dreptunghiular $abcd$ (vezi Fig. 3.10). Integrala curbilinie $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ se poate scrie ca suma a patru integrale, câte una pentru fiecare segment de contur

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} .$$

Prima integrală este egală cu Bh . A doua și a patra integrală sunt nule deoarece \vec{B} este perpendicular pe fiecare din cele două laturi (bc și da). A treia integrală este nulă deoarece câmpul magnetic în exterior este nul. Curentul electric ce străbate suprafața limitată de conturul de integrare este INh/L . Legea lui Ampère se scrie

$$b \cdot h = \mu_0 IN \frac{h}{L} ,$$

de unde

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L} . \quad (3.31)$$

3.5. În modelul Bohr al atomului de hidrogen electronul se rotește în jurul nucleului pe o traiectorie circulară cu raza de $5,1 \cdot 10^{-11}$ m cu frecvența $\nu = 6,8 \cdot 10^{15}$ rot/s. Care este valoarea câmpului magnetic produs în centrul orbitei?

R: Valoarea curentului electric datorat mișcării electronului pe orbită este $i = e/T = e\nu$. Folosind expresia inducției magnetice pentru câmpul magnetic produs de un conductor circular în centrul său (relația (3.12) pentru $x = 0$) avem

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{\mu_0 e \nu}{2R} .$$

3.6. Două fire de lungime infinită, situate la distanța d unul de altul sunt străbătute de curenți electrici de intensitate I , antiparaleli și egali ca în Fig. 3.11.

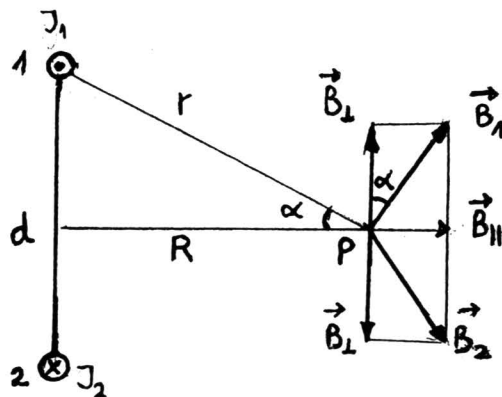


Figura 3.11:

Arătați că inducția magnetică în punctul P situat la distanțe egale de ambele fire este dat de

$$B = \frac{2\mu_0 I d}{\pi(4R^2 + d^2)} .$$

R: Inducția magnetică produsă de fiecare dintre cei doi conductori este

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} .$$

Componentele B_{\perp} ale celor doi vectori \vec{B}_1 și \vec{B}_2 se anulează reciproc. Inducția magnetică rezultantă este

$$B = 2B_{\parallel} = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \alpha ,$$

unde $\sin \alpha = d/\sqrt{4R^2 + d^2}$. După înlocuire rezultă

$$B = \frac{2\mu_0 I d}{\pi(4R^2 + d^2)} .$$

3.7. Patru fire lungi din cupru cu diametrul de 2,54 mm sunt paralele între ele, secțiunea lor transversală formând un pătrat cu latura de 20 cm. Prin fiecare fir trece un curent de 20 A în sensul indicat în Fig. 3.12. Care sunt mărimea, direcția și sensul inducției magnetice în centrul pătratului.

R: Inducția magnetică rezultantă este

$$B = 4 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin 45^\circ = \frac{2\mu_0 I}{\pi a} ,$$

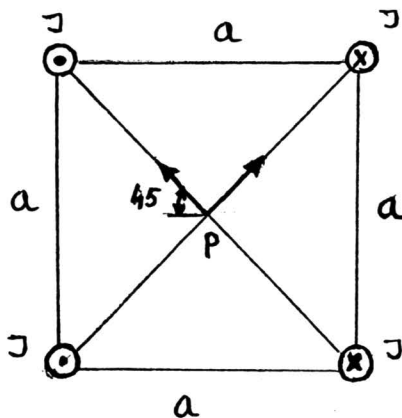


Figura 3.12:

unde $r = a\sqrt{2}/2$.

3.8. Arătați că mărimea câmpului magnetic de inducție \vec{B} produs de un segment de lungime l pe mediatoare, la distanța R de segment (Fig. 3.13) este

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4R^2}}.$$

R: Considerăm un element infinitesimal dx situat la distanța x de mediatoare. Inducția magnetică a câmpului magnetic creat de acest element este

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \cdot \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \cdot dx}{\sqrt{(x^2 + R^2)^3}}.$$

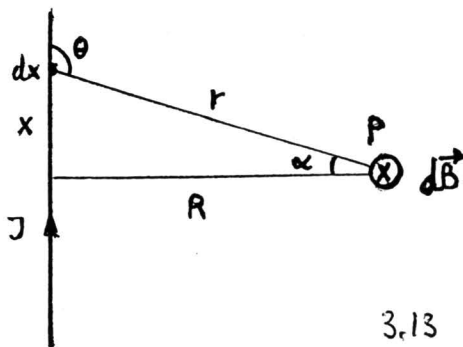
Din figura 3.13 observăm că $x = -R/\operatorname{tg} \theta$, deci $dx = R d\theta/\sin^2 \theta$ și $x^2 + R^2 = R^2/\sin^2 \theta$. Inducția magnetică rezultantă este

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + R^2)^3}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\pi/2-\alpha_1}^{\pi/2+\alpha_1} \sin \theta d\theta.$$

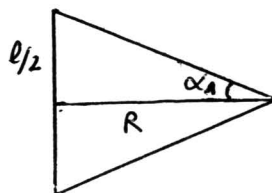
Observăm că $\theta = \pi/2 + \alpha$. Valoarea maximă a unghiului α este α_1 , cu $\sin \alpha_1 = l/(2\sqrt{R^2 + l^2/4}) = l/\sqrt{4R^2 + l^2}$ (Fig. 3.14). Rezultă că

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} 2 \sin \alpha_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4R^2}}.$$

3.9. Un disc de rază R , din ebonită este încărcat uniform pe una din fețe cu cantitatea de electricitate Q . Discul se rotește în jurul unui ax perpendicular ce trece



3.13



3.14

Figura 3.13 & 3.14

prin centrul său cu frecvența ν . Să se determine inducția magnetică într-un punct M situat pe axa de rotație la distanța h de centrul său (vezi Fig. 3.15).

R: Considerăm un element de sarcină electrică dQ , uniform distribuită pe o fâșie circulară de rază x și lărgime dx

$$dQ = Q \frac{2\pi x \cdot dx}{\pi R^2}.$$

Curentul electric produs la rotirea discului este

$$dI = \nu \cdot dQ = 2Qx\nu \frac{dx}{R^2}.$$

Inducția magnetică se poate determina folosind legea Biot-Savart

$$d^2 B = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \frac{dl \cdot r \sin 90^\circ}{r^3}.$$

Din figură observăm că $r = \sqrt{x^2 + h^2}$ și $\sin \alpha = x / \sqrt{x^2 + h^2}$.

Inducția magnetică rezultantă este determinată doar de componenta

$$d^2 B_{\perp} = d^2 B \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0 Q \nu}{2\pi R^2} \frac{x^2 dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} dl.$$

Inducția magnetică rezultantă este

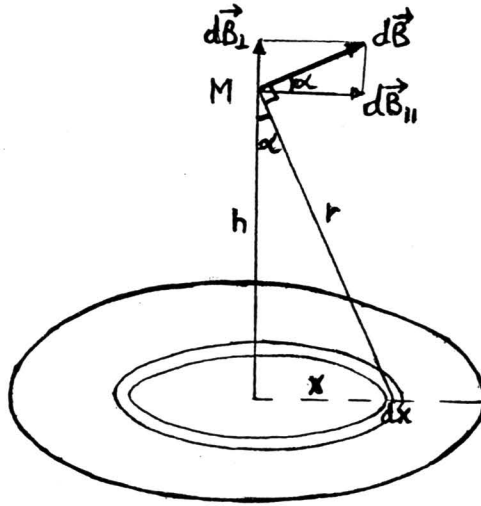
$$B = \frac{\mu_0 Q \nu}{2\pi R^2} \int_0^R \frac{x^2 dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi x} dl = \frac{\mu_0 Q \nu}{R^2} \int_0^R \frac{x^3 dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Efectuând schimbarea de variabilă $\sqrt{x^2 + h^2} = t$ ($x dx = t dt$) avem

$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = \int \frac{t^2 - h^2}{t^2} dt = t + \frac{h^2}{t} = \sqrt{x^2 + h^2} + \frac{h^2}{\sqrt{x^2 + h^2}}.$$

Deci

$$B = \frac{\mu_0 Q \nu}{R^2} \left[\sqrt{x^2 + h^2} + \frac{h^2}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right] \Big|_0^R = \frac{\mu_0 Q \nu}{R^2} \left(\sqrt{R^2 + h^2} + \frac{h^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} - 2h \right).$$



3.15

Capitolul 4

Inducția electromagnetică. Ecuațiile lui Maxwell

4.1 Experiențele lui Faraday

În 1831 Faraday a prezentat pentru prima dată un număr de experiențe ce pun în evidență apariția unui curent electric într-un circuit străbătut de un flux magnetic variabil în timp (fenomenul de inducție electromagnetică). Vom descrie în continuare câteva dintre experiențele sale.

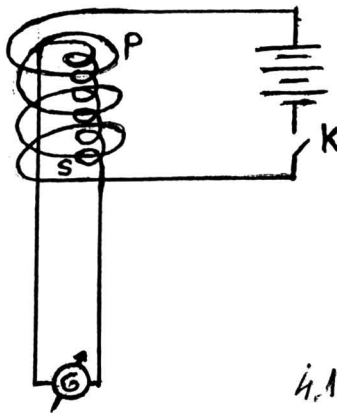
Experimentul 1

Pe un miez din lemn sunt înfășurate două bobine. Una din ele împreună cu o baterie și un întrerupător realizează un circuit electric (vezi Fig. 4.1). Cealaltă este legată la un galvanometru (instrument folosit de Faraday pentru detectarea curentului indus) care constă dintr-un ac magnetic suspendat printr-un fir nemagnetic între două bobine. La trecerea unui curent prin bobinele galvanometrului se generează un câmp magnetic ce acționează asupra acului magnetic deviindu-l. Pentru compensarea câmpului magnetic terestru Faraday a folosit un alt ac magnetic așezat înafara bobinelor galvanometrului și legat solidar cu primul ac.

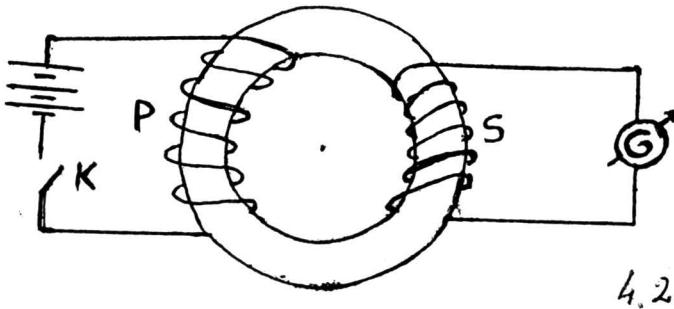
Cu ajutorul acestui experiment se pune în evidență apariția unui curent în circuitul galvanometrului la închiderea și deschiderea întrerupătorului K din circuitul primar.

Variante ale acestui experiment pot fi obținute prin folosirea unui miez din fier de formă toroidală (vezi Fig. 4.2) sau în formă de U (vezi Fig. 4.3).

Când întrerupătorul K este închis, intensitatea curentului în circuitul primar variază de la valoarea zero la valoarea maximă. Inducția magnetică produsă de curentul din circuitul primar variază și ea de la zero la valoarea maximă. Fiecare spiră a bobinei secundare, aflată în câmpul magnetic de inducție variabilă, produs de curentul

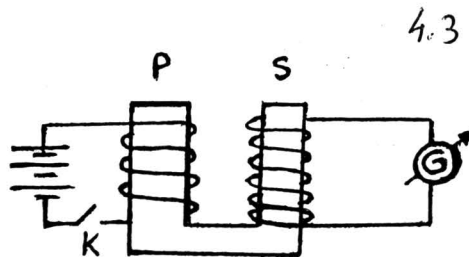


4.1



4.2

Figura 4.1, 4.2 & 4.3



4.3

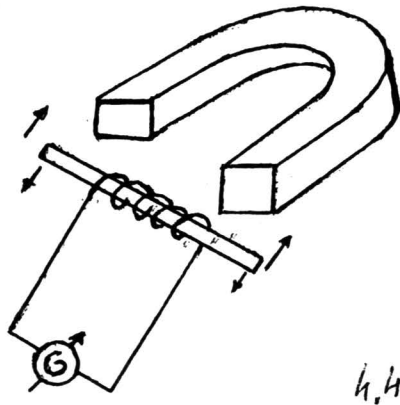


Figura 4.4:

primar, este străbătută de un flux magnetic ce variază de la zero la valoarea maximă. La deschiderea întrerupătorului, fluxul magnetic ce străbate fiecare spiră a bobinei secundare variază de la valoarea maximă la zero. Se constată că apariția unui curent indus în bobina secundară când aceasta este străbătută de un flux magnetic variabil în timp.

Experimentul 2

Pe o bară din fier se înfășoară o bobină ce se leagă la un galvanometru. La apropierea sau depărtarea barei de un magnet permanent în formă de U (vezi Fig. 4.4), acul galvanometrului indică prezența unui curent în circuitul său.

Prin mișcarea bobinei în câmpul magnetic produs de magnetul permanent, suprafața fiecărei spire este străbătută de un flux magnetic variabil în timp.

Experimentul 3

Se utilizează dispozitivul din figura 4.1 cu întrerupătorul K închis. Se pune în evidență apariția unui curent indus la scoaterea sau introducerea bobinei secundare S de pe miez. Sensul curentului indus la introducerea bobinei S pe miez este invers sensului curentului la scoaterea bobinei de pe miez.

Experimentul 4

Un alt dispozitiv cu ajutorul căruia se poate pune în evidență curentul indus este reprezentat în figura 4.5. El constă dintr-o bobină legată la un galvanometru. La

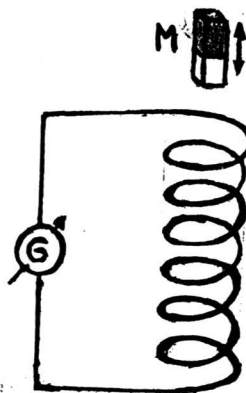


Figura 4.5:

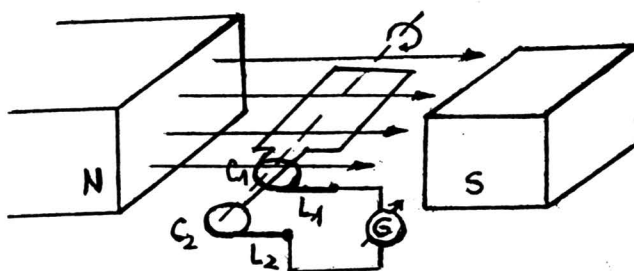


Figura 4.6:

introducerea magnetului permanent M în bobină acul galvanometrului deviază indicând apariția unui curent indus. La scoaterea magnetului, acul galvanometrului deviază în sens contrar.

Experimentul 5

Se poate obține un curent indus și cu ajutorul unui cadru cu spire ce se poate roti în câmpul magnetic uniform produs de un electromagnet sau un magnet permanent (vezi Fig. 4.6). Capetele cadrului sunt conectate la două inele metalice C_1 și C_2 ce alunecă în timpul rotației pe două lame L_1 și L_2 ce sunt legate la un galvanometru. La rotirea cadrului se observă deviația acului galvanometrului. În acest experiment inducția magnetică este constantă în timpul rotației cadrului, dar variază unghiul dintre suprafața spirei și inducția magnetică, deci fluxul magnetic prin suprafața spirelor

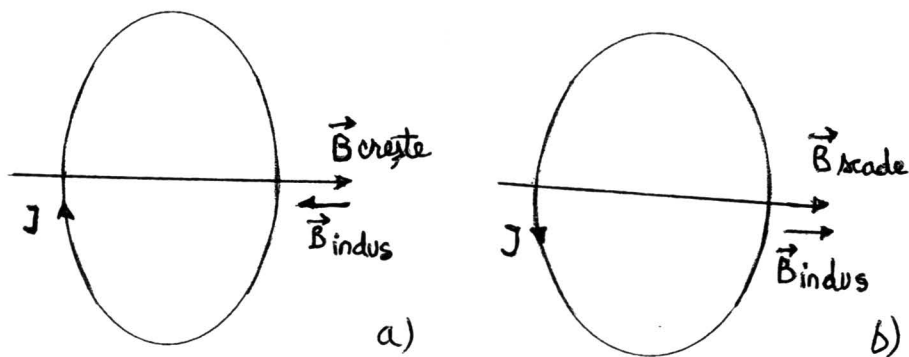


Figura 4.7:

cadrlui variază.

Sensul curentului indus într-un circuit electric depinde de modul în care variază fluxul magnetic inductor (ce străbate suprafața circuitului electric). La creșterea fluxului magnetic inductor curentul indus are un sens, la scăderea fluxului magnetic inductor curentul indus își schimbă sensul. Pe baza observațiilor experimentale, Lenz a stabilit o regulă simplă pentru determinarea sensului curentului indus, numită regula lui Lenz. Conform regulii lui Lenz, **tensiunea electromotoare (t.e.m.) indusă și curentul indus au un astfel de sens încât fluxul magnetic produs de curentul indus să se opună variației fluxului magnetic inductor care l-a produs.**

Dacă câmpul magnetic inductor \vec{B} crește atunci câmpul magnetic \vec{B}_{indus} produs de curentul indus se opune creșterii câmpului magnetic inductor (deci este de sens opus), vezi Fig. 4.7 (a). Cu ajutorul regulii burghiului se determină sensul curentului indus I .

Dacă câmpul magnetic inductor \vec{B} scade atunci câmpul magnetic \vec{B}_{indus} produs de curentul indus are același sens cu \vec{B} pentru a compensa scăderea câmpului magnetic inductor (Fig. 4.7 (b)).

Dacă în experimentele prezentate anterior se întrerupe circuitul secundar și bobina secundară se leagă la un voltmetru se constată apariția unei tensiuni atât timp cât variază fluxul magnetic.

Așadar:

1. într-un circuit deschis străbătut de un flux magnetic variabil apare o t.e.m. indusă,
2. într-un circuit închis străbătut de un flux magnetic variabil ia naștere un curent indus.

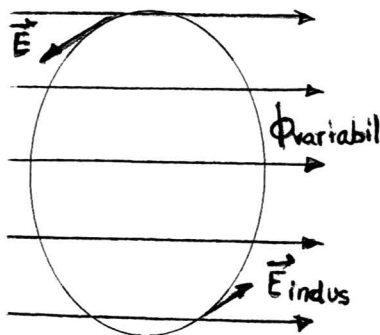


Figura 4.8:

Apariția curentului indus dovedește existența unui câmp electric ce deplasează purtătorii liberi de sarcină electrică din circuit. Acest câmp electric apare și în absența circuitului; el există datorită variației fluxului magnetic inductor. Deci, într-o regiune în care există câmp magnetic variabil apare un câmp electric indus ce are liniile de câmp închise (vezi Fig. 4.8).

În concluzie, fenomenul de inducție electromagnetică constă în apariția unui câmp electric cu liniile de câmp închise în regiunea în care există un flux magnetic variabil în timp.

Câmpul electric indus într-un element de circuit $d\vec{l}$ produce t.e.m. $de = \vec{E} \cdot d\vec{l}$, deci t.e.m. indusă în întregul circuit (de contur Γ) este

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

4.2 Legea inducției electromagnetice (legea lui Faraday)

Tensiunea electromotoare instantanee indusă într-o curbă închisă Γ este egală cu viteza instantanee de variație a fluxului magnetic prin suprafața S limitată de Γ , luată cu semn schimbat

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (4.1)$$

Folosind teorema Stokes integrala pe conturul închis Γ se poate scrie ca o integrală de suprafață

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (4.2)$$

Dacă suprafața S nu variază în timp, din (4.1) și (4.2) rezultă

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \quad (4.3)$$

Ecuatiile (4.1) și (4.3) reprezintă formulări echivalente ale legii inducției electromagnetice (legii lui Faraday).

În cazul câmpurile electrice induse, **potențialul electric** nu are sens. El se definește numai pentru câmpuri electrice conservative asociate sarcinilor electrice staționare.

Ecuția (4.1) se poate scrie și sub forma

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} , \quad (4.4)$$

unde \mathcal{E} reprezintă t.e.m. indusă într-un circuit electric străbătut de fluxul magnetic Φ variabil în timp.

Dacă circuitul în care se induce t.e.m. este format din N spire, t.e.m. indusă în cele N spire este de N ori mai mare decât t.e.m. indusă într-o spirală

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} . \quad (4.5)$$

Ținând cont de relația $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\vec{n}, \vec{B})$ rezultă (în acord cu observațiile experimentale) că **fluxul magnetic ce străbate un circuit poate fi variat prin**

1. **modificarea suprafeței (forme) circuitului,**
2. **variația inducției magnetice,**
3. **modificarea unghiului dintre normala la suprafața circuitului și direcția inducției magnetice.**

4.3 Conductor metalic rectiliniu ce se deplasează într-un câmp magnetic uniform

Considerăm un conductor metalic rectiliniu de lungime l ce se deplasează cu viteză constantă v într-un câmp magnetic uniform de inducție magnetică \vec{B} (vezi Fig. 4.9). Conductorul alunecă pe două tije paralele fixe și este așezat perpendicular pe liniile câmpului magnetic. Expresia t.e.m. induse în conductor se obține pornind de la ecuația (4.4), deci

$$\mathcal{E} = -\frac{d(BS)}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv . \quad (4.6)$$

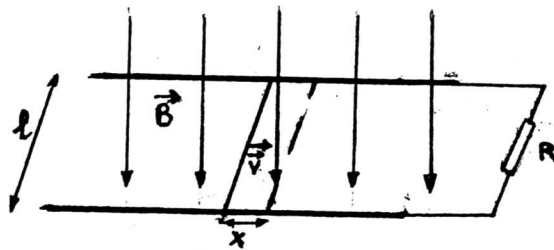


Figura 4.9

Explicația microscopică

Sub acțiunea forței $\vec{f} = e\vec{v} \times \vec{B}$ din partea câmpului magnetic, electronii se acumulează la un capăt al conductorului. La celălalt capăt rămân nodurile rețelei pozitive necompensate. Între capetele conductorului va apărea o diferență de potențial, deci un câmp electric datorat distribuției de sarcină electrică. Câmpul electric indus acționează cu o forță $\vec{F} = e\vec{E}$, în sens opus forței din partea câmpului magnetic. Se atinge o stare staționară când cele două forțe se echilibrează, astfel încât numărul electronilor ce se deplasează într-un sens sub acțiunea forței \vec{F} este egal cu cel al electronilor ce se deplasează în sens opus sub acțiunea forței \vec{f}

$$e\vec{E} = -e\vec{v} \times \vec{B}. \quad (4.7)$$

Înmulțind scalar relația (4.7) cu \vec{l} obținem

$$\vec{E} \cdot \vec{l} = -\vec{l}(\vec{v} \times \vec{B}),$$

unde $\vec{E} \cdot \vec{l}$ este tensiunea electrică la capetele conductorului.

T.e.m. indusă (nu se definește ca în electrostatică) se exprimă prin circulația câmpului electric indus

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (4.8)$$

T.e.m. indusă în urma deplasării conductorului în câmp magnetic are expresia

$$\mathcal{E} = - \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}. \quad (4.9)$$

Sensul curentului indus în conductorul rectiliniu, așezat perpendicular pe liniile câmpului magnetic, poate fi stabilit cu ajutorul mâinii drepte: se așează mâna dreaptă în lungul conductorului, astfel încât vectorul \vec{B} să intre în palmă, iar degetul mare să fie în sensul vitezei de deplasare a conductorului; celelalte patru degete vor indica sensul curentului indus în conductor.

4.4 Autoinducția

Este fenomenul de inducție electromagnetică produs într-un circuit electric datorită variației intensității curentului electric din acel circuit.

Sensul t.e.m. autoinduse poate fi găsit cu ajutorul regulii lui Lenz. Astfel, la închiderea circuitului sau la o creștere a intensității curentului electric în circuit, t.e.m. de autoinducție se opune creșterii intensității curentului inductor, iar la scăderea intensității curentului electric în circuit sau la deschiderea circuitului, t.e.m. de autoinducție se opune scăderii intensității curentului inductor. Fluxul magnetic propriu prin suprafața unui circuit este direct proporțional cu intensitatea curentului electric I din acel circuit

$$\Phi = LI, \quad (4.10)$$

unde L este inductanța circuitului. Unitatea de inductanță în SI este *henry*, cu simbolul H. Un henry este inductanța unei spire prin a cărei suprafață fluxul magnetic propriu este de 1 Wb, când spira este parcursă de un curent electric de 1 A.

Ținând cont de relația (4.10) expresia t.e.m. autoinduse se obține din

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4.11)$$

Deci, tensiunea electrică autoindusă într-un circuit este direct proporțională cu viteza de variație a intensității curentului din acel circuit, factorul de proporționalitate fiind inductanța circuitului.

Pornind de la relația (4.5) se poate determina expresia inductanței unei bobine

$$\mathcal{E} = -N \frac{d(BS)}{dt} = -N \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu N I S}{l} \right) = -\frac{\mu N^2 S}{l} \frac{dI}{dt}.$$

Ținând cont de (4.11) obținem

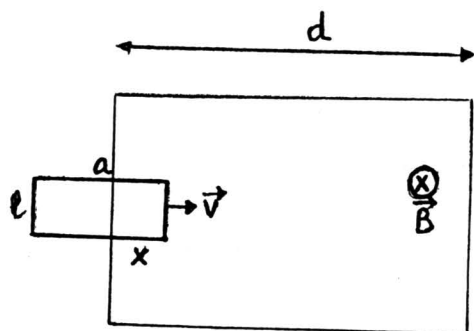
$$L = \frac{\mu N^2 S}{l}. \quad (4.12)$$

Când printr-o bobină variază curentul electric, se realizează un transfer de energie de la curentul electric la câmpul magnetic, prin mecanismul inducției electromagnetice

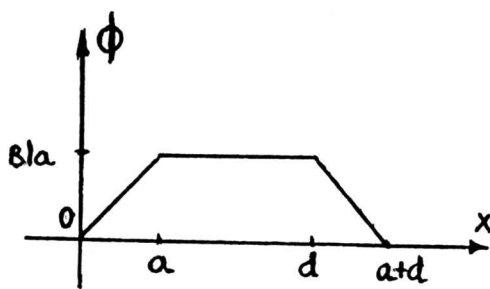
$$dW = \mathcal{E} I dt = L \frac{dI}{dt} I dt.$$

Deci energia transferată câmpului magnetic al bobinei este

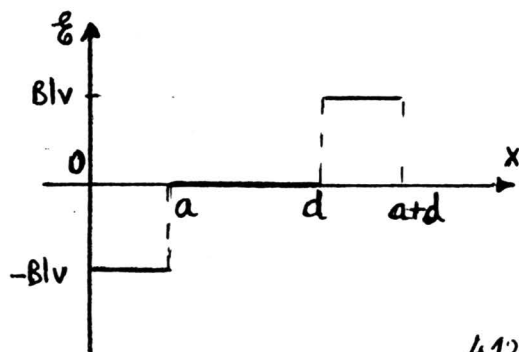
$$W = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (4.13)$$



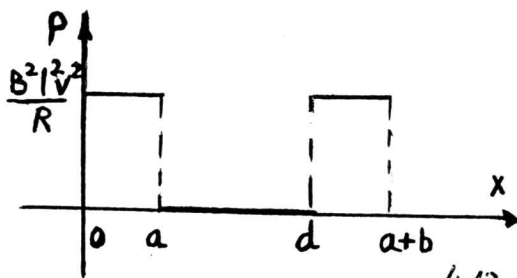
4.10



4.11



4.12



4.13

4.5 Aplicații

4.1. O spirală dreptunghiulară de rezistență R , lățime l și lungime a este deplasată cu viteză constantă v printr-o regiune din spațiu de grosime $d > a$ în care există un câmp magnetic uniform \vec{B} (vezi Fig. 4.10). Reprezentați: a) fluxul prin spirală în funcție de poziția x a spirei, b) t.e.m. indusă, c) puterea disipată în spirală.

R: a) Pentru $0 < x < a$, fluxul magnetic prin spirală are expresia $\Phi = Blx$. Pentru $a < x < d$, fluxul magnetic prin spirală are expresia $\Phi = Bla$. Pentru $d < x < d + a$, fluxul magnetic prin spirală are expresia $\Phi = Bl(a + d - x)$. Dependența fluxului magnetic prin spirală, de poziția x a spirei este reprezentat în Fig. 4.11.

b) Calculăm t.e.m. indusă cu ajutorul relației $e = -\frac{d\Phi}{dt}$. Pentru $0 < x < a$, t.e.m. are expresia $e = -Blv$. Pentru $a < x < d$, t.e.m. este nulă. Pentru $d < x < d + a$, t.e.m. are expresia $e = Blv$. Dependența t.e.m. induse în spirală, de poziția x a spirei este reprezentată în Fig. 4.12.

c) Calculăm puterea disipată în spirală cu ajutorul relației $P = \frac{e^2}{R}$. Pentru

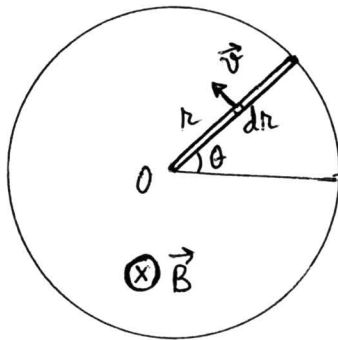


Figura 4.14.

$0 < x < a$, puterea P are expresia $P = B^2 l^2 v^2 / R$. Pentru $a < x < d$, puterea P este zero. Pentru $d < x < d + a$, puterea P are expresia $P = B^2 l^2 v^2 / R$. Dependența puterii disipate în spirală, de poziția x a spirei este reprezentată în Fig. 4.13.

4.2. O bară de cupru de lungime L se rotește cu viteza unghiulară ω într-un câmp uniform de inducție magnetică B ca în Fig. 4.14. Determinați t.e.m. \mathcal{E} între cele două extremități ale barei.

R: T.e.m. indusă în elementul infinitesimal dr de pe bară este $d\mathcal{E} = Bv dr$ cu $v = \omega r$. Deci $d\mathcal{E} = B\omega r dr$. T.e.m. între cele două extremități ale barei are expresia

$$\mathcal{E} = \int_0^L B\omega r dr = \frac{B\omega^2 L^2}{2}.$$

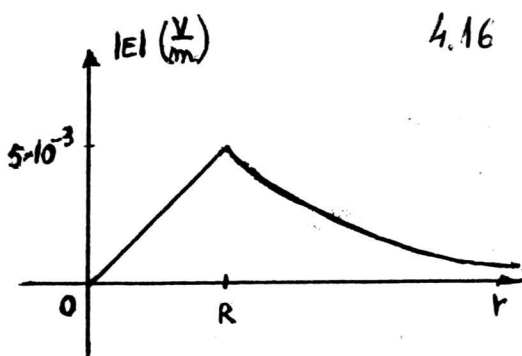
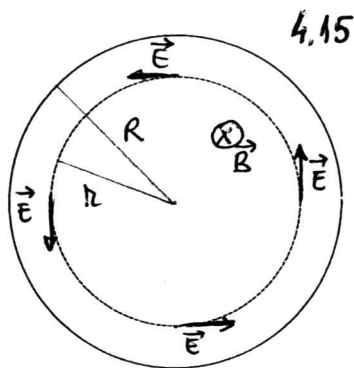
4.3. Într-o regiune cilindrică de rază R , inducția câmpului magnetic crește cu viteza dB/dt . Care este intensitatea câmpului electric E în puncte de pe cercul de rază oarecare r ? Se dau $dB/dt = 0,1 \text{ T/s}$ și $R = 10 \text{ cm}$.

R: Există două cazuri: 1) $r < R$ și 2) $r > R$. Considerăm întâi cazul $r < R$. Scriem expresia legii lui Faraday sub formă integrală (ecuația (4.1))

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

În toate punctele de pe circumferința cercului de rază r câmpul electric este constant și are valoarea E (Fig. 4.15). Deci integrala din primul membru este $E \cdot 2\pi r$. Integrala din membrul al doilea are expresia $B \cdot \pi r^2$. Astfel obținem

$$2\pi E r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt},$$



de unde

$$E = -\frac{1}{2} r \frac{dB}{dt}, \quad (4.14)$$

sau $E = -0,05r$ V/m. Semnul minus din ecuația (4.14) arată că, conform regulii lui Lenz, câmpul electric indus se opune variației câmpului magnetic inductor.

În al doilea caz ecuația (4.1) devine

$$2\pi r \cdot E = -\pi R^2 \frac{dB}{dt},$$

de unde

$$E = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}, \quad (4.15)$$

sau $E = -0,0005/r$ V/m. Reprezentarea grafică a intensității câmpului electric E în funcție de raza r este înfățișată de Fig. 4.16.

4.4. Un cadru circular de rază r și rezistență electrică R , se rotește într-un câmp magnetic de inducție constantă B cu viteza unghiulară constantă ω . Să se afle puterea disipată pe cadrul circular.

R: T.e.m. indusă în elementul infinitesimal dr este $d\mathcal{E} = B\omega r dr$, deci t.e.m. indusă în cadru este $\mathcal{E} = B\omega r^2/2$. Puterea disipată pe cadrul circular are expresia

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{B^2 \omega^2 r^4}{2R}.$$

4.6 Ecuațiile lui Maxwell

Curentul de deplasare

Considerăm un condensator încărcat cu sarcina electrică q , care se descarcă printr-un circuit exterior. În dielectricul aflat între armăturile condensatorului, curentul de conducție este nul ($\vec{j} = 0$), iar în armături curentul este $i_d = dq/dt = \epsilon \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \oint \vec{D} \cdot d\vec{S}$, unde S este gaussiană ce înconjură o armătură a condensatorului, iar $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ este inducția câmpului electric dintre armături (s-a folosit teorema Gauss, vezi capitolul 1). Când condensatorul se descarcă, câmpul electric dintre armături scade și prin urmare vectorul $d\vec{D}/dt$ este orientat în sens contrar vectorului \vec{D} . Deci, în spațiul dintre armături, vectorul $d\vec{D}/dt$ are același sens cu cel al curentului de conducție din circuitul exterior. Putem restabili formal continuitatea curentului dacă vom considera că în interiorul dielectricului circulă un curent electric (numit de Maxwell **curent de deplasare**) având densitatea $j_d = dD/dt$. Curentul de deplasare produce în jurul său un câmp magnetic, pus în evidență experimental, dar nu dezvoltă căldură prin efect Joule. Curentul total care circulă prin circuit are densitatea $\vec{j}_t = \vec{j} + \vec{j}_d$. Forma diferențială a teoremei Ampère se scrie $\text{rot } \vec{B} = \mu(\vec{j} + \vec{j}_d)$, relație care este valabilă și pentru circuitele ce conțin condensatori.

Ecuațiile lui Maxwell stabilesc legătura între mărimile câmpului electromagnetic. Ele descriu complet câmpul electromagnetic.

Principiul superpoziției este valabil și în cazul ecuațiilor lui Maxwell: **dacă două câmpuri electromagnetice satisfac ecuațiile Maxwell și suma lor le satisface.**

Formulările integrale ale ecuațiilor Maxwell sunt următoarele:

1. legea inducției electromagnetice (legea lui Faraday)

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS. \quad (4.16)$$

Tensiunea electromotoare de-a lungul oricărei curbe închise Γ , este egală cu viteza de variație a fluxului magnetic (ce trece prin orice suprafață S ce se sprijină pe conturul Γ), luată cu semn schimbat.

2. legea circuitului magnetic (legea lui Ampère)

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS. \quad (4.17)$$

Tensiunea magnetomotoare de-a lungul oricărei curbe închise Γ , este egală cu suma dintre intensitățile curenților electrici de deplasare și de conducție, care trec prin orice suprafață S ce se sprijină pe conturul Γ .

3. legea lui Gauss pentru câmpul magnetic

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 . \quad (4.18)$$

Fluxul magnetic printr-o suprafață închisă Σ este nul.

4. legea lui Gauss pentru câmpul electric

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho dV . \quad (4.19)$$

Fluxul inducției electrice printr-o suprafață închisă Σ este egal cu sarcina electrică totală aflată în interiorul suprafeței Σ .

Aplicând teorema lui Stokes (ce transformă integrala curbilinie într-o integrală de suprafață) expresiei legii inducției electromagnetice (ecuația (4.16)) și cea a legii circuitului magnetic (ecuația (4.17)) și teorema lui Ostrogradski (ce transformă integrala de suprafață într-o integrală de volum) expresiei legii lui Gauss pentru câmpul magnetic (ecuația (4.18)) și pentru câmpul electric (ecuația (4.19)) se obțin formulările diferențiale ale ecuațiilor lui Maxwell

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (4.20)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} , \quad (4.21)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 , \quad (4.22)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho . \quad (4.23)$$

Ecuația (4.20) arată că un câmp magnetic variabil produce un câmp electric.

Următoarea ecuație (4.21) exprimă dependența câmpului magnetic de densitatea curentului de conducție și de cea a curentului de deplasare. Prin urmare câmpul magnetic poate fi produs de un câmp electric variabil și de un curent de conducție.

Conform ecuației (4.22), câmpul magnetic nu are surse, el poate fi produs doar de curentul electric.

Conform ultimei ecuații Maxwell (4.23), câmpul electric are surse, el este generat de o distribuție de sarcină electrică.

Ecuațiile lui Maxwell conțin ecuația de continuitate. Pentru a demonstra aceasta aplicăm operatorul divergență asupra ecuației Maxwell (4.21).

Ținând cont că $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$ obținem

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = 0 .$$

Introducând ecuația Maxwell (4.23) obținem ecuația de continuitate

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ,$$

care exprimă conservarea sarcinii electrice

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV .$$

În vid, inducția și intensitatea câmpului electric sunt vectori paraleli

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} , \quad (4.24)$$

unde ϵ_0 este permitivitatea dielectrică a vidului. De asemenea, în vid, inducția și intensitatea câmpului magnetic sunt vectori paraleli

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} , \quad (4.25)$$

unde μ_0 este permeabilitatea magnetică a vidului. Deci, în vid în prezența densității de sarcină electrică ρ și a curentului electric de densitate \vec{j} ecuațiile Maxwell capătă următoarea formă

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (4.26)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \quad (4.27)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 , \quad (4.28)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (4.29)$$

În vid, în absența densității de sarcină electrică ρ și a curentului electric de densitate \vec{j} , ecuațiile lui Maxwell sunt simetrice în raport cu \vec{E} și \vec{B}

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (4.30)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \quad (4.31)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 , \quad (4.32)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 . \quad (4.33)$$

Remarcăm că ecuațiile lui Maxwell sub formă diferențială sunt lineare în \vec{E} și \vec{B} .

În substanță, în general vectorii \vec{D} și \vec{E} , precum \vec{B} și \vec{H} nu mai sunt paraleli. Proprietățile dielectrice și magnetice ale substanței sunt caracterizate de vectorii polarizație \vec{P} și magnetizație \vec{M} definiți de ecuațiile

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} , \quad (4.34)$$

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H} . \quad (4.35)$$

În acest caz ecuațiile lui Maxwell sunt

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 , \quad (4.36)$$

$$\text{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot} \vec{M} \right) , \quad (4.37)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 , \quad (4.38)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \text{div} \vec{P}) . \quad (4.39)$$

Ținând cont că

$$\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} , \quad (4.40)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu} \vec{B} . \quad (4.41)$$

ecuațiile lui Maxwell în substanță se pot scrie și sub forma

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (4.42)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \quad (4.43)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 , \quad (4.44)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} . \quad (4.45)$$

4.6.1 Aplicații

4.5. Într-o regiune cilindrică de rază R , intensitatea câmpului electric crește cu viteză dE/dt . Care este mărimea inducției câmpului magnetic B în punctele de pe cercul de rază r ? Se dau $dE/dt = 10^{12}$ V/(m·s) și $R = 5$ cm.

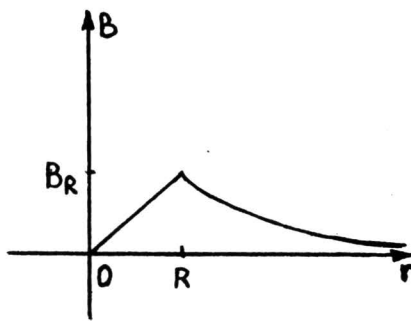


Figura 4.17:

R: Există două cazuri: 1) $r < R$ și 2) $r > R$.

Scriem legea lui Ampère generalizată

$$\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \quad (4.46)$$

în primul caz $r \leq R$. Inducția magnetică are aceeași valoare în orice punct de pe cercul de rază r , deci

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt},$$

de unde

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt} = \frac{r}{2c^2} \frac{dE}{dt}. \quad (4.47)$$

În cazul al doilea ecuația (4.46) devine

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt},$$

de unde

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} \frac{R^2}{r} \frac{dE}{dt} = \frac{R^2}{2c^2 r} \frac{dE}{dt}. \quad (4.48)$$

Dependența inducției B de raza r este reprezentată în Fig. 4.17 unde

$$B_R = \frac{\mu_0 \epsilon_0 R}{2} \frac{dE}{dt} = \frac{R}{2c^2} \frac{dE}{dt} \simeq 2,8 \cdot 10^{-7} T.$$

4.6. Să se deducă ecuația Maxwell $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ pornind de la legea circuitală Ampère pentru un contur de formă dreptunghiulară de dimensiuni mici.

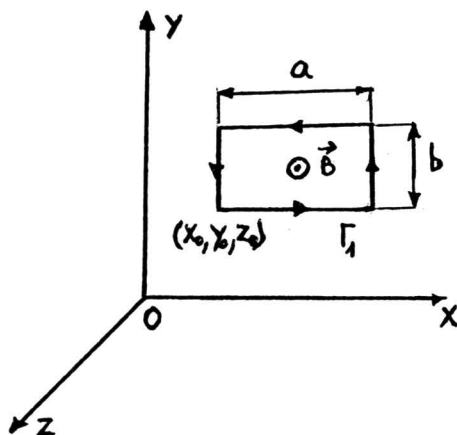


Figura 4.18:

R: Se alege un contur de formă dreptunghiulară în planul xOy în jurul unui curent electric de densitate \vec{j} (vezi Fig. 4.18). Scriem circulaţia lui \vec{B} pe acest contur

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{x_0}^{x_0+a} [B_x(x, y_0, z_0) - B_x(x, y_0 + b, z_0)] dx + \int_{y_0}^{y_0+b} [B_y(x_0 + a, y, z_0) - B_y(x_0, y, z_0)] dy. \quad (4.49)$$

Deoarece a şi b sunt mici putem dezvolta componentele B_x şi B_y în serie Taylor în jurul punctului (x_0, y_0, z_0)

$$B_x(x, y, z) = B_x(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) + \dots \quad (4.50)$$

$$B_y(x, y, z) = B_y(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial B_y}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) + \dots \quad (4.51)$$

unde indicele zero desemnează punctul (x_0, y_0, z_0) . În ecuaţiile (4.50) şi (4.51) s-au neglijat termenii de ordin superior. Introducând (4.50) şi (4.51) în (4.49) obţinem

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= - \int_{x_0}^{x_0+a} b \left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)_0 dx + a \left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)_0 \int_{y_0}^{y_0+b} dy \\ &= ab \left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)_0 - ab \left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)_0. \end{aligned}$$

Pe conturul ales derivatele parțiale nu variază, deci putem renunța la indicele zero

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = ab \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) .$$

Paranteza rotundă din relația de mai sus reprezintă componenta z a lui $\text{rot}\vec{B}$. Prin suprafața S limitată de conturul Γ_1 trece curentul electric

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{x_0}^{x_0+a} \int_{y_0}^{y_0+b} j_z \, dx \, dy = ab j_z ,$$

unde $j_z = \vec{j} \cdot \vec{e}_z$ este componenta z a densității de curent \vec{j} . Din legea circuitală Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

pentru conturul Γ_1 din planul xOy rezultă ecuația

$$ab \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mu_0 ab j_z ,$$

de unde

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_z . \quad (4.52)$$

Dacă alegem conturul de integrare în planul yOz obținem

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x . \quad (4.53)$$

Similar, dacă alegem conturul de integrare în planul zOx obținem

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_y . \quad (4.54)$$

Din ecuațiile (4.52)-(4.54) rezultă ecuația lui Maxwell

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} , \quad (4.55)$$

valabilă pentru magnetostatică ($\vec{j} = ct$) pentru vid.

Capitolul 5

Circuite electrice de curent alternativ. Regimul tranzitoriu în circuite electrice lineare

Curentul electric ce trece printr-un circuit electric este **alternativ** sinusoidal dacă intensitatea curentului electric variază după legea sinusoidală

$$i = I_m \cos(\omega t - \phi) , \quad (5.1)$$

sau $i = I_m \sin(\omega t - \phi + \pi/2)$, unde i și I_m sunt valorile instantanee, respectiv maximă ale curentului electric, ω este pulsația curentului electric, iar ϕ este faza inițială a curentului electric. Tensiunea electrică aplicată pe o porțiune de circuit este

$$u = U_m \cos \omega t . \quad (5.2)$$

În cazul curentului electric alternativ sinusoidal, valorile medii pentru intensitatea curentului electric și pentru tensiunea electrică alternativă sunt nule

$$I_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = 0 ,$$
$$U_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = 0 .$$

5.1 Valoarea efectivă

Considerăm o porțiune de circuit electric formată doar dintr-o rezistență R pe care este aplicată tensiunea electrică u și prin care trece curentul electric $i = I_m \sin \omega t$. Într-un interval de timp egal cu perioada curentului electric, prin rezistența R se

degajă, prin efect Joule, energia

$$W = \int_0^T i^2(t) R \, dt = \frac{1}{2} R I_m^2 \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) \, dt = \frac{1}{2} R I_m^2 T . \quad (5.3)$$

Același efect (se disipă aceeași energie prin efect Joule) prin aceeași rezistență R în același interval de timp, este dat de un curent continuu I_{ef} :

$$W = R I_{ef}^2 T . \quad (5.4)$$

Egalând relațiile (5.3) și (5.4) obținem

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} , \quad (5.5)$$

sau $I_{ef} = 0,707 I_m$. Relația echivalentă pentru tensiunea electrică este $U_{ef} = U_m/\sqrt{2}$ sau $U_{ef} = 0,707 U_m$.

Așadar, **valoarea efectivă (eficace) I_{ef} a intensității curentului alternativ i este egală cu cea a intensității unui curent continuu care străbătând același rezistor ca și curentul alternativ, produce același efect Joule într-un timp egal cu perioada (T) intensității curentului alternativ.**

Valorile efective pentru intensitatea curentului electric, respectiv tensiunea electrică aplicată, se pot determina cu ajutorul relațiilor

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \, dt} , \quad (5.6)$$

respectiv

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) \, dt} , \quad (5.7)$$

unde $i(t)$ și $u(t)$ sunt valorile instantanee pentru intensitatea curentului electric, respectiv tensiunea electrică.

5.2 Elemente de circuit în curent alternativ

5.2.1 Rezistorul

Considerăm circuitul electric format dintr-un rezistor de rezistență electrică R căruia i se aplică o tensiune alternativă sinusoidală

$$u = U_m \cos \omega t = U_{ef} \sqrt{2} \cos \omega t .$$

Intensitatea curentului alternativ ce trece prin rezistor este în fază cu tensiunea alternativă aplicată, deci $i = I_m \cos \omega t = I_{ef} \sqrt{2} \cos \omega t$, de unde

$$I_{ef} = \frac{U_{ef}}{R}, \quad (5.8)$$

și $I_m = U_m/R$.

5.2.2 Bobina ideală

Considerăm circuitul electric format dintr-o bobină ideală (fără rezistență electrică) de inductanță L căreia i se aplică o tensiune alternativă sinusoidală

$$u = U_m \cos \omega t = U_{ef} \sqrt{2} \cos \omega t.$$

Relația între tensiunea și intensitatea curentului alternativ este

$$u = L \frac{di}{dt},$$

de unde

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t') dt' = \frac{U_{ef} \sqrt{2}}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_{ef}}{\omega L} \sqrt{2} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Deci, curentul i este defazat cu $\pi/2$ în urma tensiunii alternative u . Scriind curentul alternativ sub forma $i = I_{ef} \sqrt{2} \cos(\omega t - \pi/2)$ obținem

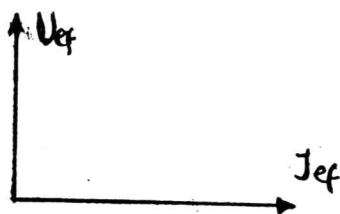
$$I_{ef} = \frac{U_{ef}}{\omega L}. \quad (5.9)$$

Mărimea ωL are dimensiuni de rezistență electrică și se numește **reactanță induc-tivă**. Ea se notează cu X_L , deci

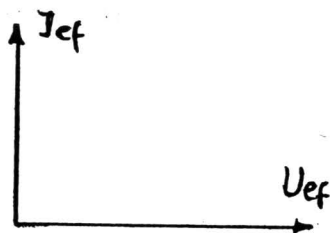
$$X_L = \omega L. \quad (5.10)$$

Dacă se reprezintă valorile efective I_{ef} și U_{ef} prin fazori (vectori de modul egal cu valorile efective și care se rotesc în sens trigonometric cu o viteză unghiulară egală cu pulsația curentului alternativ) obținem diagrama fazorială asociată circuitului în curent alternativ. Unghiul dintre fazorii I_{ef} și U_{ef} reprezintă diferența de fază între curentul și tensiunea alternativă.

În cazul bobinei ideale în curent alternativ diagrama fazorială este redată în Fig. 5.1.



5.1



5.2.

Figura 5.1. ~~8~~ 5.2

5.2.3 Condensatorul

Considerăm un condensator de capacitate C căruia i se aplică tensiunea alternativă sinusoidală $u = U_{ef}\sqrt{2} \cos \omega t$. Relația între tensiunea și curentul alternativ ce parcurge condensatorul este

$$u = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i(t) dt ,$$

de unde

$$i = C \frac{du}{dt} = -C\omega U_{ef}\sqrt{2} \sin \omega t = C\omega U_{ef}\sqrt{2} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) .$$

Deci curentul alternativ i este defazat cu $\pi/2$ înaintea tensiunii alternative u . Scriind curentul alternativ i sub forma $i = I_{ef}\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/2)$ obținem relația

$$I_{ef} = U_{ef}\omega C . \quad (5.11)$$

Mărimea $1/(\omega C)$ are dimensiuni de rezistență electrică și se numește **reactanță capacitivă**. Ea se notează cu X_C , deci

$$X_C = \frac{1}{\omega C} . \quad (5.12)$$

Diagrama fazorială asociată unui condensator în curent alternativ este reprezentată în Fig. 5.2.

5.3 Circuite în curent alternativ

5.3.1 Circuitul RLC serie

Circuitului serie (vezi Fig. 5.3) format dintr-un rezistor de rezistență electrică R , o bobină ideală de inductanță L și un condensator de capacitate C i se aplică tensiunea electrică alternativă sinusoidală

$$u = U_m \cos \omega t = U_{ef}\sqrt{2} \cos \omega t . \quad (5.13)$$

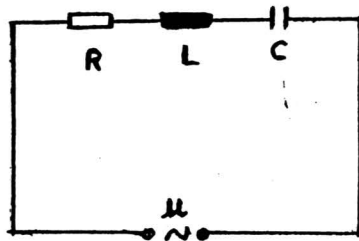


Figura 5.3:

Conform legii a doua a lui Kirchhoff, tensiunea electrică aplicată este egală cu suma căderilor de tensiune pe fiecare element de circuit

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt . \quad (5.14)$$

Circuitul introduce un defazaj între tensiunea electrică u și curentul electric i ce parcurge circuitul

$$i = I_m \cos(\omega t - \phi) = I_{ef} \sqrt{2} \cos(\omega t - \phi) , \quad (5.15)$$

unde ϕ este defazajul între tensiunea electrică u și curentul electric i . Introducând (5.13) și (5.15) în (5.14) obținem

$$RI_{ef} \cos(\omega t - \phi) - L\omega I_{ef} \sin(\omega t - \phi) + \frac{I_{ef}}{C\omega} \sin(\omega t - \phi) = U_{ef} \cos \omega t ,$$

sau

$$I_{ef} \left[R \cos(\omega t - \phi) - L\omega \cos \left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{C\omega} \cos \left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2} \right) \right] = U_{ef} \cos \omega t .$$

Dezvoltăm funcțiile trigonometrice. Din condiția ca egalitatea să fie satisfăcută la orice moment de timp obținem

$$\begin{aligned} I_{ef} \left[R \cos \phi + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \sin \phi \right] &= U_{ef} , \\ I_{ef} \left[R \sin \phi - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \cos \phi \right] &= 0 . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ridicând la pătrat cele două ecuații și adunându-le avem

$$I_{ef}^2 \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right] = U_{ef}^2 ,$$

sau

$$I_{ef} = \frac{U_{ef}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} . \quad (5.17)$$

Mărimea $\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2}$ are dimensiuni de rezistență electrică. Ea se notează cu Z și se numește **impedanța** circuitului

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}. \quad (5.18)$$

În cazul circuitului serie format dintr-un rezistor și o bobină ideală, impedanța are expresia $Z_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$. În cazul circuitului serie format dintr-un rezistor și un condensator ideal (fără rezistență electrică), impedanța are expresia $Z_{RC} = \sqrt{R^2 + 1/(\omega^2 C^2)}$.

Reactanța totală a circuitului este $X = X_L - X_C = \omega L - 1/(\omega C)$. Relația (5.18) se poate scrie și sub forma

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (5.19)$$

Din (5.16) rezultă pentru defazaj expresia

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}, \quad (5.20)$$

de unde $\cos \phi = R/Z$ iar $\sin \phi = X/Z$.

Dacă $X_L > X_C$ predomină caracterul inductiv, ($\phi > 0$) tensiunea alternativă fiind defazată înaintea curentului alternativ. Dacă $X_L < X_C$ predomină caracterul capacitiv, ($\phi < 0$) tensiunea alternativă fiind defazată în urma curentului alternativ. Dacă $X_L = X_C$ tensiunea alternativă este în fază cu intensitatea curentului alternativ ($\phi = 0$). Spunem că are loc rezonanța tensiunilor. În acest caz impedanța circuitului are valoarea minimă $Z_{\min} = R$. Deci, intensitatea curentului alternativ ce trece prin circuit are valoarea maximă $I_{\max} = U_{ef}/R$.

Frecvența ω_0 pentru care are loc rezonanța tensiunilor se obține din condiția

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (5.21)$$

Factorul de calitate Q al circuitului se definește ca raportul dintre valorile efective ale tensiunii la bornele condensatorului și tensiunii aplicate circuitului, la rezonanță

$$Q = \left(\frac{U_C}{U}\right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_L}{U}\right)_{\omega=\omega_0}. \quad (5.22)$$

Utilizând ecuația (5.21) obținem pentru factorul de calitate expresia

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.23)$$

Dependența valorii efective a curentului alternativ de pulsația ω este reprezentată grafic în Fig. 5.4. Observăm că la valori mari ale frecvenței curentului alternativ $\omega \gg \omega_0$ curentul prin circuit tinde la valoarea zero.

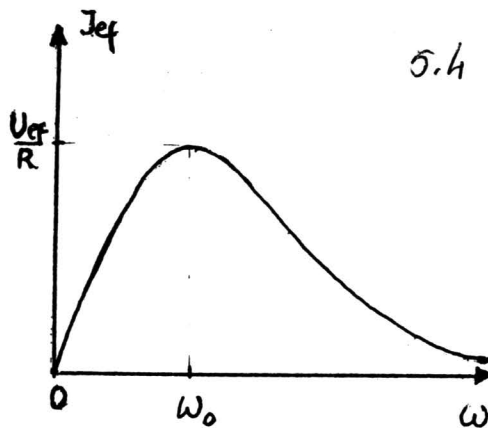


Figura 5.4:

Să calculăm valoarea efectivă a tensiunii la bornele bobinei

$$U_L = X_L I_{ef} = \frac{\omega L U_{ef}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}. \quad (5.24)$$

Dacă pulsația curentului alternativ are valoarea $\omega_L = 1/C\sqrt{L/C - R^2/Z}$ tensiunea U_L atinge valoarea maximă notată cu $U_{L,max}$ (vezi Fig. 5.5) unde

$$U_0 = \frac{U_{ef}}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad U_{L,max} = \frac{L U_{ef}}{RC \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}.$$

Conform Fig. 5.5 la frecvențe mari ($\omega \gg \omega_L$), valoarea efectivă a tensiunii la bornele bobinei tinde să aibă o valoare egală cu cea a valorii efective a tensiunii aplicate circuitului RLC. Deci, la frecvențe mari în circuit predomină caracterul inductiv.

Valoarea efectivă a tensiunii U_C la bornele condensatorului se evaluează cu ajutorul relației

$$U_C = X_C I_{ef} = \frac{U_{ef}}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}. \quad (5.25)$$

Pentru $\omega = 0$ valoarea acestei tensiuni este egală cu valoarea efectivă a tensiunii aplicate. Deci, la frecvențe foarte mici ($\omega \rightarrow 0$) circuitul se comportă ca un condensator. Pentru $\omega = \omega_0$ valoarea efectivă a tensiunii la bornele condensatorului este egală cu cea de la bornele bobinei U_0 . Pentru $\omega = \omega_C < \omega_0$ tensiunea U_C ia o valoare maximă $U_{C,max}$ (vezi Fig. 5.6).

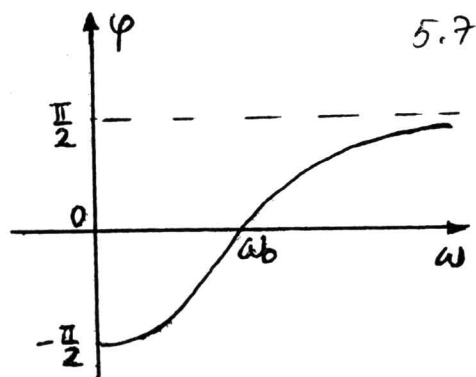
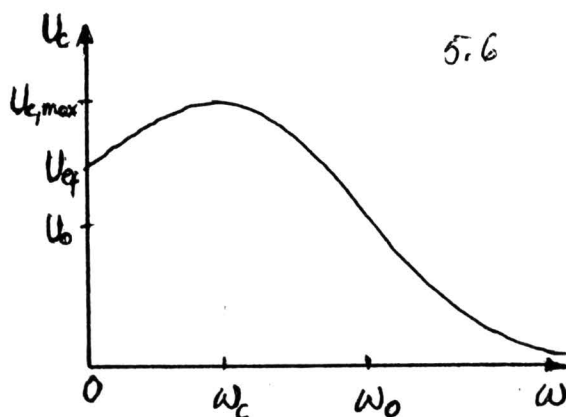
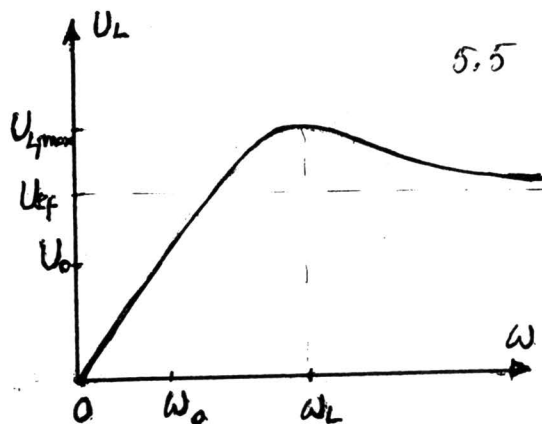
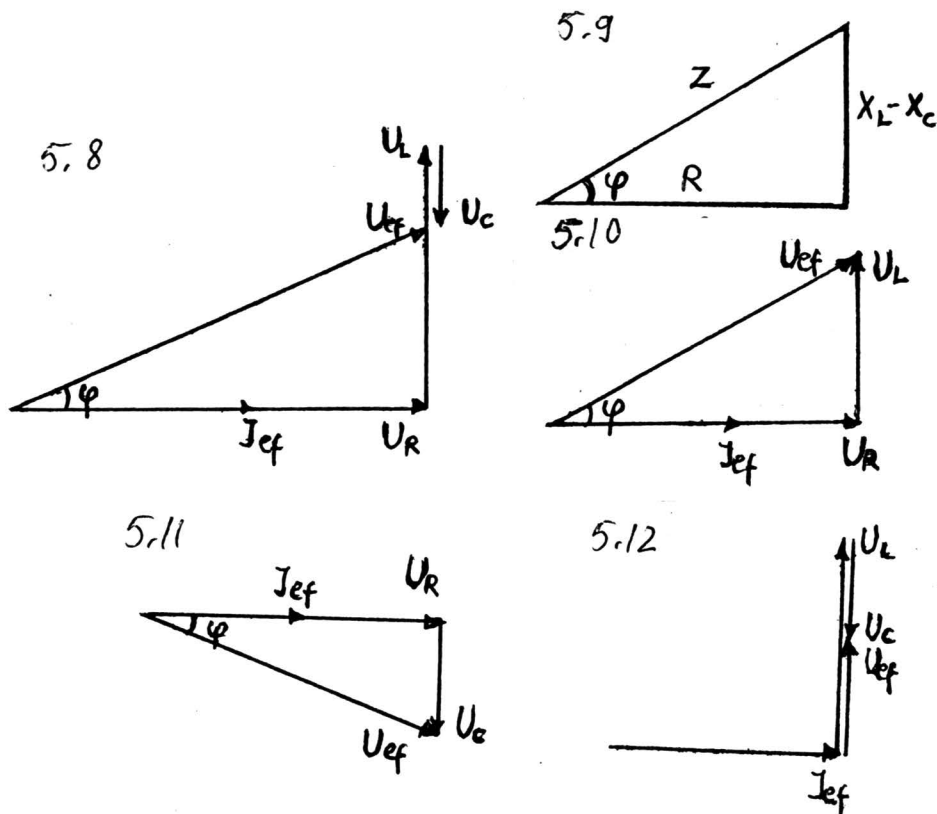


Figura 5.5-7

Să studiem acum variația defazajului (dată de ecuația (5.20)) cu frecvența. Pentru $\omega = 0$ din (5.20) obținem $\tan \phi = -\infty$ deci $\phi = -\pi/2$. Pentru $\omega = \omega_0$ avem $\tan \phi = 0$ deci $\phi = 0$, iar pentru $\omega \rightarrow \infty$ avem $\tan \phi = \infty$ deci $\phi = \pi/2$ (vezi Fig. 5.7). În concluzie defazajul variază între limitele $-\pi/2$ și $\pi/2$. La frecvențe mici ($\omega \rightarrow 0$) predomină caracterul capacitiv, iar la frecvențe foarte mari ($\omega \rightarrow \infty$) predomină caracterul inductiv.

Diagrama fazorială asociată circuitului RLC serie este reprezentată în Fig. 5.8. Din triunghiul impedanțelor (vezi Fig. 5.9) se pot determina ușor relațiile (5.19) și (5.20). În cazul circuitului RL serie ($C = \infty$) diagrama fazorială este redată în Fig. 5.10. Diagrama fazorială corespunzătoare circuitului RC serie ($L = 0$) este reprezentată în Fig. 5.11. Pentru circuitul LC serie ($R = 0$) diagrama fazorială este ilustrată în Fig. 5.12.



În cazul circuitelor serie cu mai mult de trei elemente ($n > 3$, n fiind numărul de elemente din circuit) la determinarea valorii efective (I_{ef}) a intensității curentului alternativ (când se cunoaște U_{ef}) se apelează la diagrama fazorială. Rezistența totală a circuitului este

$$R = \sum_{i=1}^n R_i ,$$

iar reactanța totală

$$X = \sum_{i=1}^n X_i .$$

Impedanța circuitului este $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, deci $I_{ef} = U_{ef}/Z$. Din analiza pe porțiuni se poate determina valoarea efectivă a tensiunii pe acea porțiune

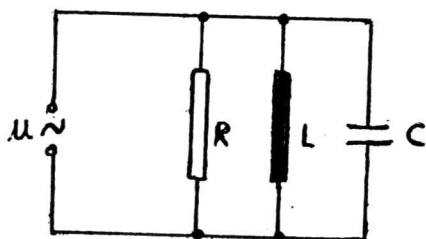
$$U_i = I_{ef} \sqrt{R_i^2 + X_i^2} ,$$

unde R_i și X_i sunt rezistența, respectiv reactanța acelei porțiuni de circuit. Defazajul între curent și tensiune este dat de $\tan \phi = X/R$.

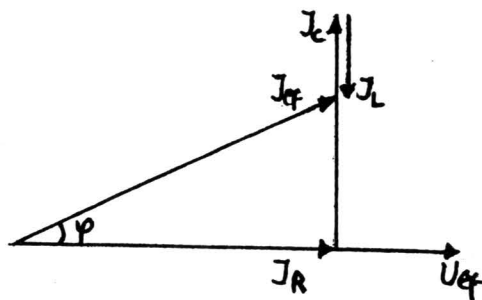
Curentul alternativ poate fi studiat și cu ajutorul numerelor complexe. Tensiunii alternative aplicate circuitului RLC serie i se asociază mărimea complexă

$$\underline{U} = U_m e^{j\omega t} , \quad (5.26)$$

5.13



5.14



unde $j^2 = -1$. Partea reală a acestei mărimi complexe reprezintă tensiunea alternativă u aplicată circuitului, iar partea imaginară reprezintă de asemenea o tensiune alternativă. Impedanței (Z) circuitului i se asociază mărimea complexă

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) . \quad (5.27)$$

Modulul acestei mărimi este chiar impedanța circuitului

$$Z = \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Z}^*} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} . \quad (5.28)$$

Argumentul lui \underline{Z} este defazajul circuitului

$$\phi = \arctg \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right) . \quad (5.29)$$

Intensitatea curentului alternativ este reprezentată de

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = I_m e^{j(\omega t - \phi)} . \quad (5.30)$$

5.4 Circuitul RLC paralel

Fie circuitul paralel reprezentat în Fig. 5.13, format dintr-un rezistor de rezistență electrică R , o bobină ideală de inductanță L și un condensator ideal de capacitate electrică C , căruia i se aplică tensiunea alternativă sinusoidală

$$u = U_{ef} \sqrt{2} \cos \omega t = U_m \cos \omega t . \quad (5.31)$$

Scriind prima lege a lui Kirchhoff $i = i_R + i_C + i_L$ unde $i_R = u/R$, $i_L = \int u dt/L$ și $i_C = C du/dt$ obținem ecuația integro-diferențială

$$i = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} . \quad (5.32)$$

Fie ϕ defazajul între tensiune și curent

$$i = I_{ef} \sqrt{2} \cos(\omega t - \phi) = I_m \cos(\omega t - \phi) . \quad (5.33)$$

Introducând (5.31) și (5.33) în (5.32) obținem ecuația

$$\frac{U_m}{R} \cos \omega t + \frac{U_m}{L\omega} \sin \omega t - C\omega U_m \sin \omega t = I_m \cos(\omega t - \phi) .$$

Dezvoltând funcțiile trigonometrice, în urma identificării avem

$$\begin{aligned} \frac{U_m}{R} &= I_m \cos \phi , \\ \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right) U_m &= I_m \sin \phi . \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ridicând la pătrat ce două relații și adunându-le obținem

$$I_{ef} = U_{ef} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right)^2} . \quad (5.35)$$

Impărțindu-le rezultă expresia pentru defazaj

$$\phi = \arctg \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right) R . \quad (5.36)$$

Diagrama fazorială asociată circuitului RLC paralel este reprezentată în Fig. 5.14.

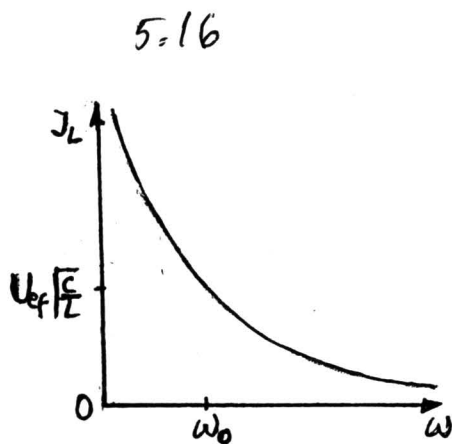
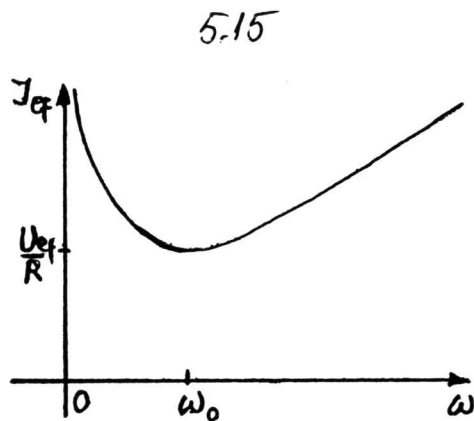
Pentru $X_L > X_C$ din (5.36) rezultă $\phi < 0$ deci tensiunea alternativă este defazată în urma curentului alternativ. Pentru $X_L < X_C$, $\phi > 0$ tensiunea alternativă este defazată înaintea curentului alternativ.

Când $X_L = X_C$ tensiunea alternativă este în fază cu intensitatea curentului alternativ ($\phi = 0$). Spunem că are loc rezonanța curenților ($I_C = I_L$). În acest caz impedanța circuitului are valoarea maximă $Z_{max} = R$, iar valoarea efectivă a intensității curentului alternativ atinge o valoare minimă egală cu valoarea efectivă a intensității curentului ce parcurge rezistorul $I_{min} = U_{ef}/R = I_R$. Frecvența ω_0 pentru care are loc rezonanța curenților se obține din (5.21).

Dependența lui I_{ef} de ω dată de (5.35) este înfățișată în Fig. 5.15. La frecvențe mici predomină caracterul capacitiv ($X_C = 1/C\omega \rightarrow \infty$ și $X_L = L\omega \rightarrow 0$) iar la frecvențe mari cel inductiv ($X_L \rightarrow \infty$). Dacă valoarea rezistenței R este foarte mică, I_{ef} ia valori foarte mari.

Valoarea efectivă a intensității curentului ce parcurge bobina este $I_L = U_{ef}/(L\omega)$. Dependența lui de frecvență este ilustrată în Fig. 5.16.

Pentru condensator putem scrie $I_C = \omega C U_{ef}$. Dependența lui de frecvență este redată în Fig. 5.17.



Studiul variației defazajului cu frecvența se realizează cu ajutorul funcției

$$\operatorname{tg} \phi = R \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right) . \quad (5.37)$$

Pentru $\omega = 0$, $\operatorname{tg} \phi = \infty$ deci $\phi = \pi/2$, pentru $\omega = \omega_0$, $\operatorname{tg} \phi = 0$ deci $\phi = 0$, iar pentru $\omega \rightarrow \infty$, $\operatorname{tg} \phi = -\infty$ deci $\phi = -\pi/2$. Graficul funcției (5.37) este reprezentat în Fig. 5.18.

5.5 Puterea în curent alternativ

Considerăm cazul particular al unui circuit RLC serie căruia i se aplică tensiunea alternativă sinusoidală (dată de (5.13)). Intensitatea curentului alternativ ce trece prin circuit este dată de (5.15). Puterea instantanee absorbită de circuit se exprimă prin

$$p = ui = \frac{1}{2} I_m U_m [\cos \phi + \cos(2\omega t - \phi)] . \quad (5.38)$$

Ținând cont de relația (5.14) puterea instantanee are expresia

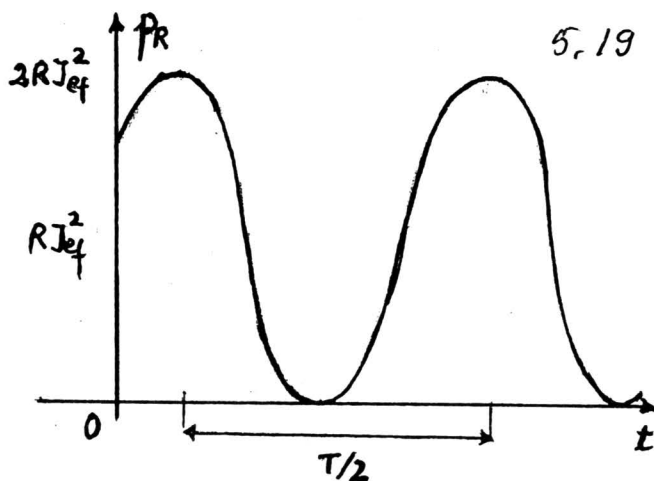
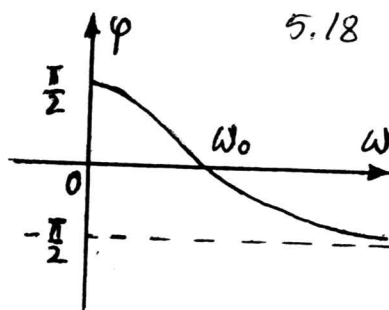
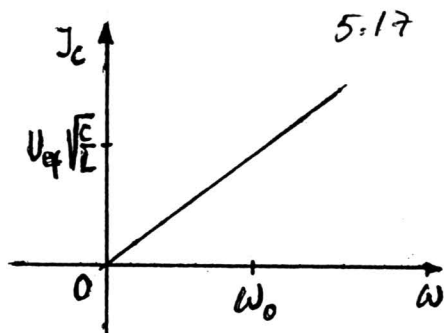
$$p = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \int i dt . \quad (5.39)$$

Primul termen din (5.39) reprezintă puterea disipată în rezistorul R :

$$p_R = Ri^2 = RI_{ef}^2 [1 + \cos 2(\omega t - \phi)] . \quad (5.40)$$

Reprezentând grafic funcția $p_R(t)$ obținem curba din figura 5.19. Valoarea medie a acestei puteri este

$$P_{R,med} = \frac{1}{T} \int_0^T p_R(t) dt = RI_{ef}^2 . \quad (5.41)$$



Termenul al doilea din (5.39) este o funcție periodică cu perioada $T/2$ și pulsația 2ω

$$p_L = Li \frac{di}{dt} = -L\omega I_{ef}^2 \sin 2(\omega t - \phi) . \quad (5.42)$$

Termenul al treilea din (5.39) reprezintă puterea instantanee absorbită de condensator

$$p_C = \frac{i}{C} \int i(t) dt = \frac{I_{ef}^2}{C\omega} \sin 2(\omega t - \phi) . \quad (5.43)$$

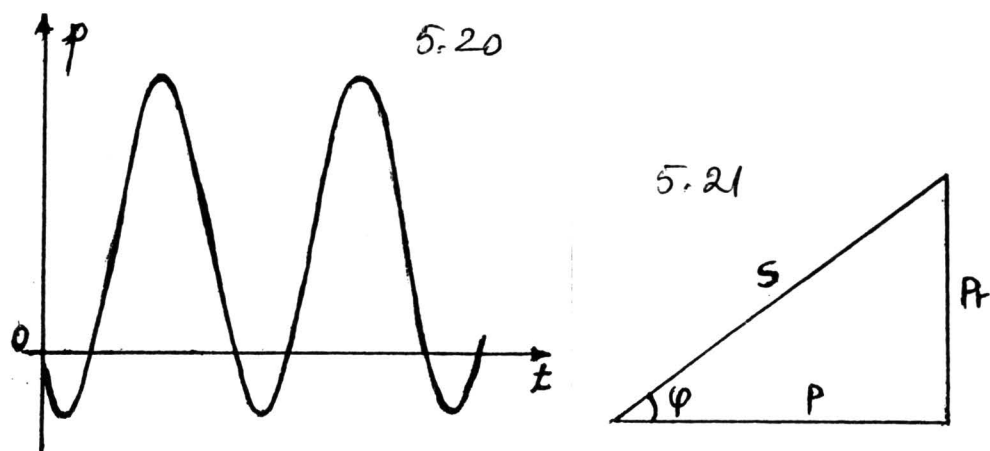
Valorile medii ale celor două puteri p_L și p_C sunt nule

$$P_{L,med} = \frac{1}{T} \int_0^T p_L(t) dt = -L\omega I_{ef}^2 \int_0^T \sin 2(\omega t - \phi) dt = 0 ,$$

$$P_{C,med} = \frac{1}{T} \int_0^T p_C(t) dt = \frac{I_{ef}^2}{C\omega} \int_0^T \sin 2(\omega t - \phi) dt = 0 .$$

Deci, numai rezistorul absoarbe putere, numită **putere consumată**. Schimbul de putere între sursă și reactanțe se poate determina cu ajutorul mărimii

$$p_X = p_L + p_C = -I_{ef}^2 X \sin 2(\omega t - \phi) , \quad (5.44)$$



cu $P_{X,med} = 0$. În alternanța negativă cele două reactanțe absorb putere de la sursă ($p_X > 0$) ca în cea pozitivă să cedeze aceeași putere ($p_X < 0$). În două alternanțe consecutive (reprezentând o perioadă) reactanțele nu absorb putere.

Valoarea medie a puterii instantanee (dată de (5.38)) absorbite de circuit este

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = RI_{ef}^2 = P_{R,med} = U_R I_{ef} = I_{ef} U_{ef} \cos \phi. \quad (5.45)$$

Această putere poartă numele de putere **activă**. Ea se exprimă în W (wat). Termenul $\cos \phi$ se numește **factor de putere**.

Variația în timp a puterii instantanee absorbite de circuit este ilustrată în Fig. 5.20. Se observă că, graficul este asimetric în raport cu abscisa. În alternanța pozitivă circuitul absoarbe putere, iar în cea negativă cedează putere (mai mică decât cea absorbită). Diferența celor două puteri reprezintă puterea consumată de circuit.

Valoarea maximă a puterii instantanee p_X se numește putere **reactivă**

$$P_r = P_{X,max} = XI_{ef}^2 = U_X I_{ef} = I_{ef} U_{ef} \sin \phi. \quad (5.46)$$

Ea se exprimă în VAR. Mărimea

$$S = I_{ef} U_{ef} = Z I_{ef}^2, \quad (5.47)$$

poartă numele de putere **aparentă** și se exprimă în VA. Ținând cont de expresiile celor trei puteri putem scrie

$$S^2 = P_r^2 + P^2. \quad (5.48)$$

Circuitului RLC serie i se asociază triunghiul puterilor reprezentat în Fig. 5.21.

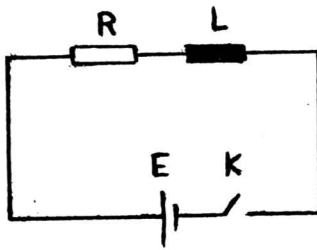


Figura 5.22

În cazul unui circuit lipsit de elemente reactive ($X = 0$, $R \neq 0$) defazajul este nul ($\phi = 0$) iar $P = I_{ef}U_{ef} = S$ și $P_r = 0$.

În cazul unui circuit fără rezistență electrică ($R = 0$, $X \neq 0$) defazajul este $\pi/2$ ($\phi = \pi/2$) iar $P_r = I_{ef}U_{ef} = S$ și $P = 0$.

Situațiile reale corespund cazului $X \neq 0$ și $R \neq 0$, deci $\phi \neq 0$ și $\phi \neq \pi/2$.

Folosind expresiile (5.26) și (5.30) puterea aparentă S se poate exprima prin

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U_{ef}I_{ef}e^{j\phi} = P + jP_r, \quad (5.49)$$

de unde

$$S^2 = \underline{S} \cdot \underline{S}^* = (P + jP_r)(P - jP_r) = P^2 + P_r^2.$$

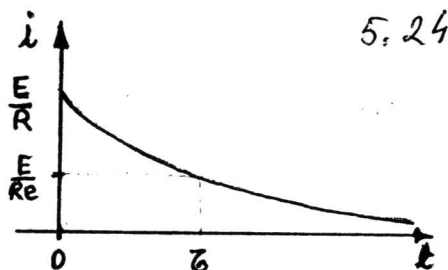
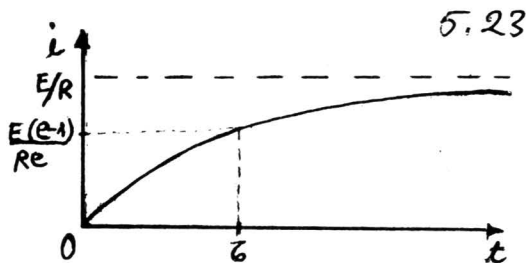
5.6 Regimul tranzitoriu în circuitele electrice lineare

Regimul tranzitoriu reprezintă starea în care se găsește un circuit electric când trece de la un regim permanent la altul. De exemplu, la conectarea unui circuit la o sursă de energie electrică se trece de la starea în care nu trece curent electric la o stare în care prin circuit trece curent electric, printr-un regim tranzitoriu.

Circuitele lineare sunt acele circuite pentru care valorile elementelor de circuit (rezistențe, inductanțe, capacități) nu depind de intensitatea curentului electric i , de tensiunea electrică aplicată u și de timp t . În aceste circuite sunt valabile legile lui Kirchhoff.

5.6.1 Circuitul RL serie

Considerăm circuitul electric din figura 5.22. Rezistența internă a sursei se înglobează în rezistența circuitului.



a) *Studiul regimului tranzitoriu la închiderea întrerupătorului*

La momentul inițial ($t = 0$) curentul electric prin circuit este nul ($i = 0$). La închiderea întrerupătorului, după un timp suficient de îndelungat ($t \rightarrow \infty$) circuitul electric este în regimul permanent, în care prin circuit trece curentul electric constant $I = E/R$. Scriem legea a doua a lui Kirchhoff

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E . \quad (5.50)$$

Această ecuație diferențială în i admite o soluție de forma

$$i(t) = A_1 + A_2 e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

Impunând condițiile: 1) pentru $t = 0$, $i = 0$ și 2) pentru $t \rightarrow \infty$, $i = E/R$ obținem expresiile constantelor $A_1 = -A_2 = E/R$. Deci, intensitatea curentului electric în regim tranzitoriu are expresia

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) . \quad (5.51)$$

Introducând (5.51) în (5.50) obținem $\tau = L/R$. Reprezentarea grafică a funcției (5.51) este ilustrată în Fig. 5.23.

b) *Studiul regimului tranzitoriu la deschiderea întrerupătorului*

La momentul inițial ($t = 0$) intensitatea curentului electric prin circuit are valoarea $i = E/R$. Se deschide întrerupătorul. După un timp suficient de îndelungat ($t \rightarrow \infty$)

circuitul electric este în regimul permanent în care curentul electric prin circuit este nul ($I = 0$). În această situație, legea a doua a lui Kirchhoff se scrie

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0 . \quad (5.52)$$

Ținând cont de condiția inițială ($t = 0$, $i = E/R$) soluția acestei ecuații diferențiale este

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} . \quad (5.53)$$

Reprezentarea grafică a funcției (5.51) este ilustrată în Fig. 5.24. Când $t = \tau$ intensitatea curentului electric scade de e ori. Mărimea $\tau = L/R$ se numește **constanta de timp**.

Cele două situații prezentate anterior sunt simetrice în raport cu regimul permanent.

5.6.2 Circuitul RC serie

Considerăm circuitul electric reprezentat în figura 5.25.

a) Încărcarea condensatorului

La momentul inițial ($t = 0$) sarcina electrică de pe armăturile condensatorului este zero ($q = 0$). După închiderea întrerupătorului, după un timp suficient de îndelungat ($t \rightarrow \infty$), sarcina electrică acumulată pe armăturile condensatorului este $q = EC$. Legea a doua a lui Kirchhoff se scrie

$$Ri + \frac{q}{C} = E , \quad (5.54)$$

unde $i = dq/dt$. Obținem ecuația diferențială în q :

$$RC \frac{dq}{dt} + q = EC ,$$

ce admite soluția

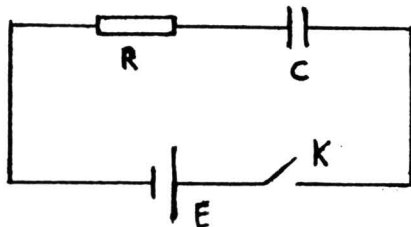
$$q(t) = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) . \quad (5.55)$$

Reprezentarea grafică a funcției (5.55) este ilustrată în Fig. 5.26.

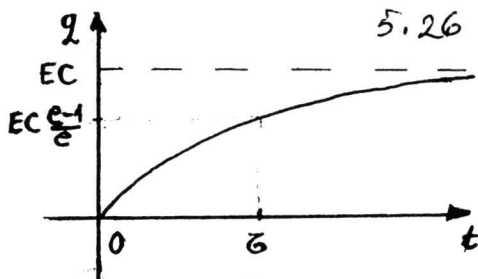
b) Descărcarea condensatorului

La momentul inițial ($t = 0$) sarcina electrică de pe armăturile condensatorului are valoarea $q = q_0$. Se deschide întrerupătorul. După un timp suficient de îndelungat ($t \rightarrow \infty$) sarcina electrică scade la zero ($q = 0$). În această situație, legea a doua a lui Kirchhoff se scrie

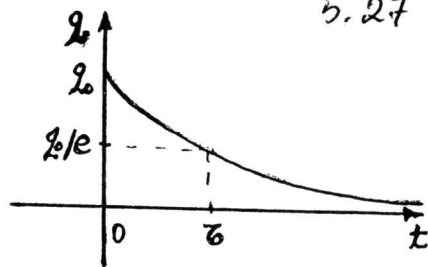
$$Ri + \frac{q}{C} = 0 , \quad (5.56)$$



5.25



5.26



5.27

unde $i = dq/dt$. Se obține ecuația diferențială

$$RC \frac{dq}{dt} + q = 0,$$

ce are soluția

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (5.57)$$

Reprezentarea grafică a funcției (5.57) este ilustrată în Fig. 5.27. Când $t = RC$ sarcina electrică de pe armăturile condensatorului scade de e ori.

5.6.3 Circuitul LC serie

Considerăm circuitul electric format dintr-un condensator încărcat ce se descarcă printr-o bobină ideală. Scriem legea a doua a lui Kirchhoff

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

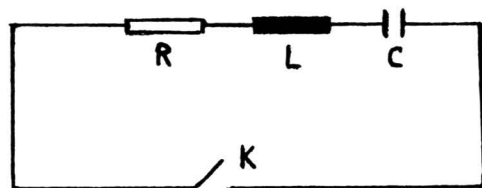
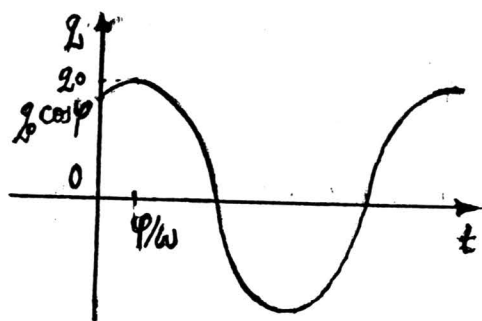
unde $i = dq/dt$. Obținem ecuația diferențială de ordinul al doilea în q :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0. \quad (5.58)$$

Notând $\omega = 1/\sqrt{LC}$ soluția ecuației (5.58) este

$$q = q_0 \cos(\omega t - \phi). \quad (5.59)$$

Reprezentarea grafică a funcției (5.59) este ilustrată în Fig. 5.28. Intr-un astfel de circuit electric apar oscilații electrice.



5.6.4 Circuitul electric oscilant

Considerăm un circuit electric RLC serie alimentat de la o sursă de curent continuu. După un timp suficient de lung scoatem instantaneu sursa din circuit. Se obține circuitul oscilant din Fig. 5.29. În acest caz legea a doua a lui Kirchhoff se scrie

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 ,$$

cu $i = dq/dt$. Obținem ecuația diferențială de ordinul al doilea în q :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 . \quad (5.60)$$

Soluția ecuației diferențiale (5.60) ne dă variația în timp a sarcinii electrice a condensatorului

$$q(t) = q_0 e^{-bt} \cos(\omega t - \phi) , \quad (5.61)$$

unde ω este pulsația oscilațiilor amortizate. Sarcina electrică a condensatorului q scade în timp, fiind modulată de factorul $\cos(\omega t - \phi)$. Introducând (5.61) în (5.60) obținem sistemul

$$\begin{aligned} L(b^2 - \omega^2) + \frac{1}{C} - Rb &= 0 , \\ \omega(2Lb - R) &= 0 , \end{aligned}$$

de unde

$$b = \frac{R}{2L} , \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} . \quad (5.62)$$

În funcție de valorile elementelor circuitului distingem următoarele trei situații:

1. $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ Oscilațiile electrice sunt periodice și amortizate.

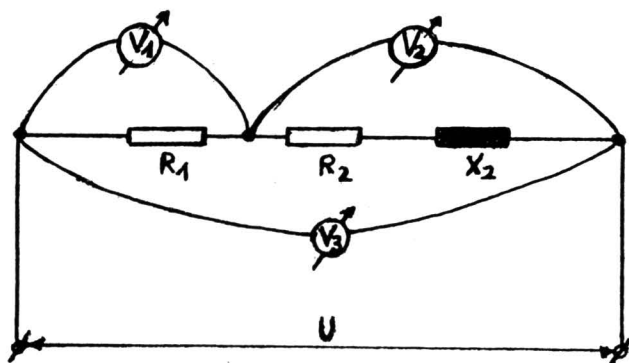


Figura 5.30

2. $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ În acest caz ($\omega = 0$) procesul de descărcare este amortizat $q = q_0 e^{-bt} \cos \phi$.

3. $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$ Procesul de descărcare este aperiodic.

Pentru $R \rightarrow 0$ trecem la caracteristicile circuitului LC serie, iar pentru $R \rightarrow \infty$ nu mai avem oscilații electrice. Amortizarea oscilațiilor este cu atât mai pronunțată cu cât rezistența circuitului este mai mare și inductanța este mai mică.

Circuitul oscilant este analog pendulului elastic. Corespondența mărimilor este dată de următorul tabel

pendulul elastic	circuitul oscilant
elongația	sarcina electrică
masa	inductanța
constanta elastică	inversul capacității
coeficientul de rezistență	rezistența electrică
energia cinetică	energia câmpului magnetic
energia potențială	energia câmpului electric

5.7 Aplicații

5.1. Fie circuitul reprezentat în Fig. 5. 30, unde $R_1 = 100 \, \Omega$, $U_1 = 60 \, \text{V}$, $U_2 = 80 \, \text{V}$ și $U = 100 \, \text{V}$. Să se calculeze R_2 și X_2 dacă se neglijează curenții electrice prin voltmetre.

R: Fazorii \underline{U}_1 și \underline{U}_2 au expresiile

$$\underline{U}_1 = U_1 = I R_1 , \quad (5.63)$$

$$\underline{U}_2 = I \underline{Z}_2 , \quad (5.64)$$

unde $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = Z_2 e^{j\phi_2}$ cu $j^2 = -1$, $Z_2^2 = R_2^2 + X_2^2$ și $\phi_2 = \arctg(X_2/R_2)$. Din (5.63) și (5.64) rezultă că $U_1 \underline{Z}_2 = \underline{U}_2 R_1$, sau

$$U_1 Z_2 = U_2 R_1 . \quad (5.65)$$

Fazorul \underline{Z} este definit de $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = Z e^{j\phi} = R_1 + R_2 + jX_2$, deci

$$Z^2 = (R_1 + R_2)^2 + X_2^2 . \quad (5.66)$$

Din relația $\underline{U} = I \underline{Z}$ și din relația (5.63) rezultă că

$$U_1 Z = U R_1 . \quad (5.67)$$

Din ecuațiile (5.65), (5.66) și (5.67) rezultă sistemul

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)^2 + X_2^2 &= \left(R_1 \frac{U}{U_1} \right)^2 , \\ R_2^2 + X_2^2 &= \left(R_1 \frac{U_2}{U_1} \right)^2 . \end{aligned} \quad (5.68)$$

Scăzând cele două ecuații ale sistemului (5.68) obținem pentru R_2 expresia

$$R_2 = \frac{1}{2} \left[R_1 - \frac{R_1(U - U_2)(U + U_2)}{U_1^2} \right] . \quad (5.69)$$

Inlocuind valorile numerice pentru R_1 , U_1 , U_2 și U obținem $R_2 = 0$, deci $\underline{Z}_2 = jX_2 = X_2 e^{j\pi/2}$ sau

$$Z_2 = X_2 . \quad (5.70)$$

Din (5.70) și (5.65) rezultă că $X_2 = U_2 R_1 / U_1 \simeq 133 \Omega$.

5.2. Parametrii circuitului electric din Fig. 5.31 satisfac relația $R = X_L = X_C$. Tensiunea de alimentare este $u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \gamma)$. Să se determine impedanța echivalentă Z_e , rezistența echivalentă R_e și reactanța echivalentă X_e a circuitului.

R: Scriem legile lui Kirchhoff pentru acest circuit

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 , \quad (5.71)$$

$$\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 , \quad (5.72)$$

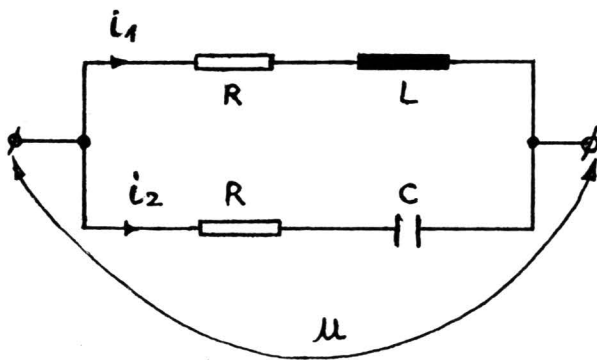


Figura 5.3.1

unde $\underline{Z}_1 = R + jX_L = Z_1 e^{j\phi_1}$, $\tan\phi_1 = X_L/R = 1$, deci $\phi_1 = \pi/4$, $Z_1 = \sqrt{R^2 + X_L^2} = R\sqrt{2}$, $\underline{Z}_2 = R + jX_C = Z_2 e^{j\phi_2}$, $\tan\phi_2 = -X_C/R = -1$, deci $\phi_2 = -\pi/4$, $Z_2 = \sqrt{R^2 + X_C^2} = R\sqrt{2}$. Relația (5.72) devine

$$\underline{I}_1 Z_1 e^{j\pi/4} = \underline{I}_2 Z_2 e^{-j\pi/4},$$

de unde

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{Z_1}{Z_2} e^{j\pi/2}. \quad (5.73)$$

Din (5.73) și (5.71) rezultă pentru \underline{I} expresia

$$\underline{I} = \underline{I}_1 \left(1 + j \frac{Z_1}{Z_2} \right).$$

Ținând cont că $\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_e = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1$ obținem

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 \left(1 + j \frac{Z_1}{Z_2} \right)^{-1},$$

de unde $Z_e = R$, $R_e = R$ și $X_e = 0$.

5.3. Un curent de intensitate $i = 10 \sin(1000\pi t)$ A, trece printr-un circuit RC paralel cu $C = 100/\pi \mu\text{F}$. Se cere să se determine rezistența R pentru care puterea activă este maximă. Care este valoarea acestei puteri?

R: Scriem legile lui Kirchhoff

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C, \quad (5.74)$$

$$R\underline{I}_R = \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_C, \quad (5.75)$$

unde $\underline{I} = I = 10/\sqrt{2}$ A și $\underline{Z}_C = 1/(j\omega C) = X_C/j$. Din (5.74) și (5.75) rezultă că

$$\underline{I}_R = \frac{I}{1 + j \frac{R}{X_C}}, \quad (5.76)$$

deci $I_R = IX_C(R^2 + X_C^2)^{-1/2}$. Puterea activă este dată de

$$P = RI_R^2 = I^2 R \frac{X_C^2}{R^2 + X_C^2}. \quad (5.77)$$

Ea este maximă când $dP/dR = 0$. Această condiție este echivalentă cu ecuația algebrică

$$-R^2 + X_C^2 = 0, \quad (5.78)$$

de unde $R = X_C = 1/(\omega C) = 10 \Omega$. Introducând (5.78) în (5.77) obținem $P_{max} = I^2 X_C/2 = 250$ W.

5.4. Un condensator încărcat, de capacitate C , este legat cu un condensator C' (inițial neîncărcat) prin intermediul unei rezistențe R .

a) Știind că după timpul θ sarcina condensatorului devine $1/n$ din valoarea sa inițială, să se calculeze rezistența R în funcție de C , C' , θ și n .

b) Cunoscând sarcina electrică inițială Q_0 a condensatorului C să se calculeze energia disipată sub formă de căldură pe rezistența R : 1) în timpul θ și 2) când echilibrul electrostatic este atins.

R: a) Fie q sarcina electrică a condensatorului C , iar $q' = Q_0 - q$ sarcina electrică a condensatorului C' la momentul t . Scriem legea a doua a lui Kirchhoff

$$Ri + \frac{q'}{C'} - \frac{q}{C} = 0, \quad (5.79)$$

unde

$$i = \frac{dq'}{dt} = -\frac{dq}{dt}. \quad (5.80)$$

Rezultă ecuația diferențială în q :

$$R \frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right) q = \frac{Q_0}{C'}. \quad (5.81)$$

Soluția ecuației omogene este

$$q(t) = A \cdot \exp \left(-\frac{C + C'}{RCC'} t \right). \quad (5.82)$$

Soluția particulară a ecuației diferențiale (5.81) este

$$q = \frac{Q_0 C}{C + C'} . \quad (5.83)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (5.81) este

$$q(t) = A \cdot \exp \left(-\frac{C + C'}{RCC'} t \right) + \frac{Q_0 C}{C + C'} . \quad (5.84)$$

Constanta de integrare A se determină din condiția inițială $q(0) = Q_0$, deci $A = Q_0 C' / (C + C')$. Rezultă pentru q expresia

$$q = \frac{Q_0}{C + C'} \left[C' \exp \left(-\frac{C + C'}{RCC'} t \right) + C \right] . \quad (5.85)$$

Dar $q(\theta) = Q_0/n$, deci

$$R = \frac{(C + C')\theta}{CC' \ln \left(\frac{nC'}{C + C' - nC} \right)} . \quad (5.86)$$

b) Energia disipată sub formă de căldură pe rezistorul R în timpul θ este

$$W = \int_0^\theta Ri^2(t) dt ,$$

unde

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{RC} \exp \left(-\frac{C + C'}{RCC'} t \right) , \quad (5.87)$$

deci

$$W = \frac{Q_0^2}{2n^2} \left[\frac{n^2 - 1}{C} + \frac{(n - 1)^2}{C'} \right] . \quad (5.88)$$

Energia disipată sub formă de căldură pe rezistorul R după atingerea echilibrului electrostatic este

$$W' = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{Q_0^2 C'}{2C(C + C')} . \quad (5.89)$$

5.5. Fie un circuit electric format dintr-o sursă, un condensator C , un rezistor R și un întrerupător K . La momentul $t = 0$ tensiunea sursei este zero, iar întrerupătorul este deschis. Tensiunea sursei se modifică linear în timp. Să se determine curentul de încărcare.

R: Fie i curentul electric prin circuit, q sarcina electrică de pe armăturile condensatorului și $U = \alpha t$, tensiunea sursei la momentul t . Scriem legea a doua a lui Kirchhoff

$$Ri + \frac{q}{C} = \alpha t . \quad (5.90)$$

Derivăm această relație și obținem ecuația diferențială în i :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \alpha . \quad (5.91)$$

Soluția ecuației omogene este

$$i(t) = A \cdot \exp \left(-\frac{1}{RC} t \right) . \quad (5.92)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (5.91) se determină prin metoda variației constantelor. Astfel

$$\frac{di}{dt} = \frac{dA}{dt} \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) - \frac{A}{RC} \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) . \quad (5.93)$$

Introducând (5.93) în (5.91) obținem

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\alpha}{R} \exp \left(\frac{t}{RC} \right) . \quad (5.94)$$

Soluția acestei ecuații este

$$A = \alpha C \exp \left(\frac{t}{RC} \right) + A_0 . \quad (5.95)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (5.91) este

$$i(t) = A_0 \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) + \alpha C . \quad (5.96)$$

Constanta de integrare A_0 se determină din condiția inițială $i(0) = 0$, rezultă pentru i expresia

$$i(t) = \alpha C \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) \right] . \quad (5.97)$$

5.6. O bobină de rezistență $0,01 \, \Omega$ și inductanță $0,5 \, \text{mH}$ este legată la o baterie de $12 \, \text{V}$, de rezistență internă neglijabilă.

a) După cât timp de la închiderea circuitului, curentul electric devine 90 % din valoarea sa finală?

b) La acest moment, ce energie este înmagazinată în câmpul magnetic?

R: a) Fie i curentul electric ce trece prin circuit la momentul t . Scriem legea a doua a lui Kirchhoff

$$Ri = -L \frac{di}{dt} + E . \quad (5.98)$$

Rezultă ecuația diferențială neomogenă

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E , \quad (5.99)$$

a cărei soluție generală este

$$i(t) = A \cdot \exp \left(-\frac{R}{L} t \right) + \frac{E}{R} . \quad (5.100)$$

Constanta de integrare A se determină din condiția inițială $i(0) = 0$. Rezultă pentru i expresia

$$i(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \exp \left(-\frac{Rt}{L} \right) \right] . \quad (5.101)$$

Valoarea sa finală este

$$i' = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{E}{R} .$$

Timpul după care curentul electric este 90 % din valoarea sa finală este determinat din ecuația

$$\frac{90}{100} \frac{E}{R} = \frac{E}{R} \left[1 - \exp \left(-\frac{Rt}{L} \right) \right] ,$$

deci $t = \frac{L}{R} \ln 10 = 0,115$ s.

$$\text{b) } W = \frac{Li^2}{2} = \frac{81}{200} \frac{LE^2}{R^2} = 291 \text{ J}.$$

5.7. Doi condensatori de capacități C_1 și C_2 se leagă în serie cu o bobină de inductanță L . Inițial condensatorul C_1 este încărcat cu sarcina electrică Q . Să se determine intensitatea curentului electric ce trece prin bobină după închiderea circuitului.

R: Fie i curentul electric prin circuit, u_1 tensiunea la bornele condensatorului C_1 ($i = -dq_1/dt = -C_1 du_1/dt$) și u_2 tensiunea la bornele condensatorului C_2 ($i = dq_2/dt = C_2 du_2/dt$) la momentul t . Scriem legea a doua a lui Kirchhoff

$$L \frac{di}{dt} + u_2 - u_1 = 0 . \quad (5.102)$$

Derivăm această relație și obținem ecuația diferențială în i :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i = 0 . \quad (5.103)$$

Notăm

$$\omega_0^2 = \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} .$$

Obținem ecuația diferențială

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0 .$$

Deoarece $i(0) = 0$ rezultă că $i(t) = A \sin \omega_0 t$. Constanta de integrare se determină din condiția

$$L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} + u_2(0) - u_1(0) = 0 ,$$

dar $u_1(0) = Q/C_1$, $u_2(0) = 0$ și $L di/dt|_{t=0} = LA\omega_0$, deci $A = Q/(LC_1\omega_0)$. Expresia curentului electric prin circuit este

$$i(t) = \frac{Q}{LC_1\omega_0} \sin \omega_0 t . \quad (5.104)$$

Capitolul 6

Câmpul electromagnetic

Câmpul electromagnetic este format din câmpuri electrice și magnetice intercondiționate (ale căror linii de câmp sunt închise) ce se propagă în vid cu viteza luminii $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s.

Dacă într-o regiune oarecare a spațiului există un câmp magnetic variabil în timp, cu linii de câmp închise, atunci va apărea și un câmp electric variabil în timp cu linii de câmp închise în jurul liniilor câmpului magnetic. Acest câmp electric variabil va crea un câmp magnetic ș.a.m.d. Acest ansamblu de câmpuri electrice și magnetice intercondiționate, variabile în timp, se propagă în spațiu sub forma unei unde electromagnetice.

Intr-un mediu de permitivitate dielectrică ϵ și permeabilitate magnetică μ , viteza de propagare a undelor electromagnetice este

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} . \quad (6.1)$$

Pentru vid $\epsilon_r = 1$ și $\mu_r = 1$, deci viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid este egală cu viteza luminii

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} . \quad (6.2)$$

Indicele de refracție al mediului este dat de

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} . \quad (6.3)$$

Pentru mediile dielectrice pentru care $\mu_r = 1$ indicele de refracție are expresia

$$n = \sqrt{\epsilon_r} .$$

6.1 Clasificarea undelor electromagnetice

Cea mai uzuală clasificare a radiațiilor electromagnetice este realizată după frecvența și lungimea lor de undă în vid.

1. Undele radio reprezintă domeniul de frecvență de la zeci de hertz până la un gigahertz ($1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$). După lungimea de undă se subîmpart în
 - (a) unde lungi (lungimea de undă cuprinsă între 30 km și 750 m),
 - (b) unde medii (lungimea de undă cuprinsă între 750 m și 50 m),
 - (c) unde scurte (lungimea de undă cuprinsă între 50 m și 10 m),
 - (d) unde ultrascurte (lungimea de undă cuprinsă între 10 cm și 30 cm).
2. Microundele reprezintă domeniul de frecvență de la 1 GHz până la 0,3 THz ($1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$). După lungimea de undă se subîmpart în
 - (a) unde decimetrice,
 - (b) unde centimetrice,
 - (c) unde milimetrice.
3. Radiația infraroșie reprezintă domeniul de frecvență de la 0,3 THz până la 400 THz. Ele au lungimea de undă cuprinsă în intervalul 1 mm - 780 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$).
4. Radiația vizibilă reprezintă domeniul de lungime de undă cuprinsă în intervalul de la 760 nm până la 400 nm.
5. Radiația ultravioletă are lungimea de undă cuprinsă în intervalul 380 nm și 6 Å ($1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$).
6. Radiația X (Röntgen) are lungimea de undă cuprinsă în intervalul 100 Å și 0,01 Å.
7. Radiația γ reprezintă domeniul de frecvență cuprins între $3 \times 10^{18} \text{ Hz}$ și $3 \times 10^{22} \text{ Hz}$.

6.2 Ecuațiile lui Maxwell în vid

Câmpul electromagnetic (descriș de mărimile: intensitatea câmpului electric \vec{E} , inducția electrică \vec{D} , intensitatea câmpului magnetic \vec{H} , inducția magnetică \vec{B}) în vid verifică

următoarele ecuațiile Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

S-a ținut cont că în vid câmpul electromagnetic nu are surse, deci $\rho = 0$ și $\vec{j} = 0$. Vectorii \vec{E} și \vec{D} sunt legați prin relația

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad (6.5)$$

iar vectorii \vec{H} și \vec{B} prin

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (6.6)$$

Ținând cont de relațiile (6.5) și (6.6), ecuațiile (6.4) devin

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (6.8)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (6.9)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (6.10)$$

6.3 Ecuația de propagare

Aplicând operatorul *rotor* asupra ecuației (6.7) obținem

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{B})}{\partial t}.$$

Ținând cont de ecuația (6.8) avem

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (6.11)$$

unde

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\operatorname{rot} \vec{E})_x & (\operatorname{rot} \vec{E})_y & (\operatorname{rot} \vec{E})_z \end{vmatrix}$$

cu \vec{e}_x , \vec{e}_y și \vec{e}_z versorii axelor de coordonate. Componenta x a lui $\text{rot}\vec{E}$ este

$$(\text{rot}\vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} . \quad (6.12)$$

Celelalte componente $((\text{rot}\vec{E})_y$ și $(\text{rot}\vec{E})_z$) se obțin din (6.12) prin permutări circulare. Proiecția pe axa Ox a ecuației (6.11) se scrie

$$(\text{rot}(\text{rot}\vec{E}))_x = -\epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} ,$$

unde

$$\begin{aligned} (\text{rot}(\text{rot}\vec{E}))_x &= \frac{\partial(\text{rot}\vec{E})_z}{\partial y} - \frac{\partial(\text{rot}\vec{E})_y}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) . \end{aligned}$$

Ultima paranteză din expresia de mai sus reprezintă $\text{div}\vec{E}$ care conform ecuației Maxwell (6.10) este nulă, deci

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} ,$$

sau

$$\Delta E_x - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 . \quad (6.13)$$

Se poate continua în aceeași manieră pentru E_y și E_z . Din cele trei ecuații de tipul (6.13) pentru cele trei componente ale intensității câmpului electric, putem scrie

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} ,$$

sau

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 . \quad (6.14)$$

În continuare determinăm ecuația diferențială pe care o satisface câmpul magnetic. Aplicând operatorul *rotor* asupra ecuației (6.8) obținem

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{B}) = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial(\text{rot}\vec{E})}{\partial t} . \quad (6.15)$$

Introducând (6.7) în (6.15) obținem

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{B}) = -\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} . \quad (6.16)$$

Proiectând pe axa Ox ecuația (6.16) avem

$$[\text{rot}(\text{rot}\vec{B})]_x = -\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} ,$$

unde

$$\begin{aligned} [\text{rot}(\text{rot}\vec{B})]_x &= \frac{\partial(\text{rot}\vec{B})_z}{\partial y} - \frac{\partial(\text{rot}\vec{B})_y}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) . \end{aligned}$$

Ultima paranteză din expresia de mai sus reprezintă $\text{div}\vec{B}$ care conform ecuației Maxwell (6.9) este nulă, deci

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} , \quad (6.17)$$

sau

$$\Delta B_x - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0 . \quad (6.18)$$

Similar se pot scrie ecuațiile diferențiale și pentru celelalte componente B_y și B_z ale inducției magnetice. Ecuația vectorială corespunzătoare ecuației (6.17) este

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} ,$$

sau

$$\Delta \vec{B} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 . \quad (6.19)$$

Ținând cont de relațiile (6.5) și (6.6) putem scrie relații asemănătoare pentru \vec{D} și \vec{H} .

Putem alege soluții ale ecuațiilor (6.14) și (6.19) de tipul

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} , \quad (6.20)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} , \quad (6.21)$$

unde ω este pulsația undei ($\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ cu ν și T frecvența respectiv perioada undei), iar \vec{k} este vectorul de undă ($k = 2\pi/\lambda$ cu $\lambda = vT = v/\nu$ lungimea de undă). Cele două mărimi, pulsația ω și numărul de undă k , sunt legate prin relația

$$\omega = vk . \quad (6.22)$$

Pentru vid relația (6.22) devine

$$\omega = ck .$$

Componenta pe axa Ox a intensității câmpului electric, conform relației (6.20) se scrie

$$E_x = E_{0x} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} ,$$

deci

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -ik_x E_x .$$

Introducând (6.20) în ecuația Maxwell (6.10) obținem

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 , \quad (6.23)$$

deci cei doi vectori \vec{k} și \vec{E} au direcții perpendiculare.

Introducând (6.21) în ecuația Maxwell (6.9) obținem

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 . \quad (6.24)$$

Din relația (6.24) rezultă că cei doi vectori \vec{k} și \vec{B} sunt ortogonali.

Soluțiile de tipul (6.20) și (6.21) se numesc unde electromagnetice monocromatice.

Conform ecuațiilor (6.23) și (6.24) putem afirma că undele electromagnetice monocromatice sunt transversale: \vec{B} și \vec{E} oscilează într-un plan perpendicular pe direcția de propagare dată de vectorul de undă \vec{k} .

Pentru a găsi relația între vectorii \vec{k} , \vec{B} și \vec{E} folosim celelalte ecuații Maxwell. Introducând (6.20) și (6.21) în (6.7) obținem

$$-i(\vec{k} \times \vec{E}) = -i\omega \vec{B} ,$$

de unde

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} . \quad (6.25)$$

Deci vectorul \vec{B} este perpendicular pe planul determinat de vectorii \vec{k} și \vec{E} . Introducând (6.20) și (6.21) în (6.8) obținem

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \omega \vec{E} . \quad (6.26)$$

Deci vectorul \vec{E} este perpendicular pe planul determinat de vectorii \vec{k} și \vec{B} . Din (6.25) și (6.26) rezultă că cele două câmpuri \vec{B} și \vec{E} sunt ortogonale între ele.

6.4 Undele electromagnetice monocromatice plane

Când toate particulele (mediului în care se propagă unda) situate într-un plan perpendicular pe direcția de propagare a undei, oscilează identic unda este plană. Fie o undă plană ce se propagă cu viteză constantă v în direcția Oz . Elongația $\xi(z, t)$ a unei particule situată în punctul z pe direcția de propagare va lua aceeași valoare ($\xi(0, t - z/v)$) cu cea a particulei situată în origine cu o întârziere z/v dată de timpul necesar undei ca să ajungă din origine până în punctul considerat, deci

$$\xi(z, t) = \xi\left(0, t - \frac{z}{v}\right) = f\left(t - \frac{z}{v}\right) = F(z - vt) .$$

O undă electromagnetică plană constă din câmpuri electrice și magnetice ce au următoarele proprietăți

- au o direcție de propagare unică,
- componentele celor două câmpuri nu depind de coordonatele transversale față de direcția de propagare.

În cele ce urmează vom considera cazul undei electromagnetice monocromatice plane de pulsație ω ce se propagă în direcția Oz . Cele două câmpuri sunt descrise de

$$\vec{E}(z, t) = E_x(z, t) \vec{e}_x + E_y(z, t) \vec{e}_y + E_z(z, t) \vec{e}_z , \quad (6.27)$$

$$\vec{B}(z, t) = B_x(z, t) \vec{e}_x + B_y(z, t) \vec{e}_y + B_z(z, t) \vec{e}_z . \quad (6.28)$$

Deoarece unda electromagnetică plană se propagă după direcția Oz , vectorul de undă are direcția acestei axe ($\vec{k} = k\vec{e}_z$). Din (6.23) rezultă $kE_z = 0$, de unde $E_z = 0$. Din (6.24) rezultă $kB_z = 0$, de unde $B_z = 0$.

Prin urmare, relațiile (6.27) și (6.28) devin

$$\vec{E}(z, t) = E_x(z, t) \vec{e}_x + E_y(z, t) \vec{e}_y , \quad (6.29)$$

$$\vec{B}(z, t) = B_x(z, t) \vec{e}_x + B_y(z, t) \vec{e}_y . \quad (6.30)$$

În cazul ales de noi ecuația undei se scrie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 , \quad (6.31)$$

unde u poate fi oricare din componentele E_x , E_y , B_x și B_y , iar v este viteza de propagare a undei electromagnetice în mediul respectiv.

Pentru a determina expresia soluției ecuației (6.31), aplicăm metoda separării variabilelor. Prin urmare, căutăm soluții de tipul

$$u(z, t) = u_1(z) \cdot u_2(t) . \quad (6.32)$$

Impunând condiția ca expresia (6.32) să fie soluție a ecuației (6.31) obținem

$$\frac{v^2}{u_1} \frac{d^2 u_1}{dz^2} = \frac{1}{u_2} \frac{d^2 u_2}{dt^2} . \quad (6.33)$$

Fiecare membru din ecuația (6.33) depinde de o singură variabilă (primul de variabila z , iar al doilea de variabila t). Egalitatea este îndeplinită dacă fiecare membru este egal cu aceeași constantă, pe care din motive dimensionale o alegem egală cu $-\omega^2$. Obținem astfel două ecuații diferențiale de ordinul al doilea

$$\frac{d^2 u_1}{dz^2} + k^2 u_1 = 0 , \quad (6.34)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \omega^2 u_2 = 0 , \quad (6.35)$$

unde $k = \omega/v$. Soluțiile celor două ecuații diferențiale (6.34) și (6.35) sunt

$$\begin{aligned} u_1 &= B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz} , \\ u_2 &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} . \end{aligned}$$

Alegem soluția generală a ecuației (6.31) de forma

$$u(z, t) = A e^{i(\omega t \pm kz)} , \quad (6.36)$$

unde A reprezintă amplitudinea undei. Semnul $+$ corespunde undei regressive (ce se deplasează în sens contrar axei Oz cu viteza v), iar semnul $-$ undei progresive ce se îndepărtează de sursă (se deplasează cu viteza v în sensul pozitiv al axei Oz) cu viteza v .

Soluția (6.36) reprezintă o undă armonică plană de pulsație ω , ce se propagă în direcția axei Oz . Soluția generală a ecuației (6.31) se poate scrie și sub forma

$$u(z, t) = \bar{A} \cos(\omega t \pm kz) , \quad (6.37)$$

unde \bar{A} reprezintă amplitudinea undei. Funcția trigonometrică *cosinus* poate fi înlocuită cu funcția trigonometrică *sinus* cu modificarea corespunzătoare a fazei.

Locul geometric al punctelor din spațiu pentru care faza undei este constantă se numește **suprafață de undă**. La un moment t fixat, faza undei $\phi = \omega t \pm kz$ este constantă ($\phi = ct$) în puncte pentru care z este același, deci suprafața de undă este un plan. Spunem că unda descrisă de (6.36) este o undă plană.

6.5 Densitatea de energie. Vectorul Poynting

Considerăm un volum V din spațiu, delimitat de suprafața S . Energia stocată de câmpul electromagnetic în acest volum este

$$W = \int_V w dV ,$$

unde w este densitatea de energie a câmpului electromagnetic

$$w = w_E + w_B = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 . \quad (6.38)$$

În continuare vom determina (folosind ecuațiile lui Maxwell) viteza de variație a densității de energie a câmpului electromagnetic. Înmulțind scalar ecuația Maxwell (6.7) cu \vec{B} obținem

$$\vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} , \quad (6.39)$$

sau

$$\vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} .$$

Înmulțind scalar ecuația Maxwell (6.8) cu \vec{E} obținem

$$\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} , \quad (6.40)$$

sau

$$\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} .$$

Ținând cont de ecuațiile (6.39) și (6.40) putem scrie că

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} + \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} .$$

Folosind relația

$$\vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b} - \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} = \text{div}(\vec{b} \times \vec{a}) ,$$

obținem

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) . \quad (6.41)$$

Introducând mărimea vectorială \vec{Y} , numită **vectorul Poynting**, definită de

$$\vec{Y} = \vec{E} \times \vec{H} , \quad (6.42)$$

relația (6.41) devine

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div} \vec{Y} .$$

Integrând această relație și folosind teorema Gauss-Ostrogradsky obținem

$$-\frac{dW}{dt} = \Phi_Y , \quad (6.43)$$

unde

$$\Phi_Y = \int_V \operatorname{div} \vec{Y} \cdot dV = \oint_S \vec{Y} \cdot \vec{n} dS ,$$

reprezintă fluxul vectorului Poynting.

Ecuația (6.43) reprezintă legea conservării energiei: energia care se scurge prin suprafața S ce delimitează volumul V (membrul al doilea din (6.43)) este egală cu cantitatea cu care a scăzut energia stocată de câmpul electromagnetic în volumul V (primul membru din (6.43)).

6.6 Polarizarea undelor electromagnetice

În cazul undelor electromagnetice plane vectorii \vec{E} și \vec{B} oscilează în fază. În continuare ne vom referi la vectorul \vec{E} . Relații similare se pot scrie și pentru celălalt vector, \vec{B} .

Dacă vârful vectorului \vec{E} descrie o traiectorie elicoidală (cu pasul egal cu lungimea de undă λ), a cărei proiecție pe planul normal la direcția de propagare este o elipsă, câmpul electric se numește eliptic polarizat. Când sensul de rotație coincide cu cel trigonometric, câmpul electric este polarizat **eliptic stânga**. Când sensul de rotație este sensul acelor de ceasornic câmpul electric este polarizat **eliptic dreapta**.

Considerăm o undă monocromatică plană ce se propagă în direcția axei Oz . Intensitatea câmpului electric este un vector ce oscilează în planul xOy

$$\vec{E}(z, t) = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y , \quad (6.44)$$

cu

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(\omega t - kz + \phi_1) , \\ E_y &= E_2 \cos(\omega t - kz + \phi_2) , \\ E &= E_0 \cos(\omega t - kz + \phi), \quad E_0^2 = E_1^2 + E_2^2 \text{ pentru } \phi_1 = \phi_2 = \phi. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Dacă diferența de fază între componentele E_x și E_y este $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 0$ sau $\pm\pi$ undele se numesc **linear polarizate**.

Componentele E_x și E_y nu sunt cuplate de ecuațiile Maxwell. Deci este posibil să producem cu o anumită sursă, unde electromagnetice cu componenta E_x nenulă dar cu componenta E_y nulă (câmpul electric este polarizat linear după Ox). Deci, în acest caz componentele E_x și E_y sunt nenule oricare ar fi z și t .

Pentru $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ putem scrie

$$\vec{E}(z, t) = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y = E_0 \vec{\epsilon} \cos(\omega t - kz + \phi) ,$$

unde

$$\vec{\epsilon} = \frac{E_1}{E_0} \vec{e}_x + \frac{E_2}{E_0} \vec{e}_y ,$$

este vectorul de polarizație. Acest vector are modulul egal cu unitatea

$$\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} = \frac{E_1^2 + E_2^2}{E_0^2} = 1 .$$

Elipsa degenerază în două drepte confundate, ce reprezintă una din diagonalele dreptunghiului în care se înscrie elipsa.

Dacă diferența de fază între componentele E_x și E_y este $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \pm\pi/2$ unde se numesc **circular polarizate**. În acest caz vârful vectorului \vec{E} descrie un cerc într-un plan perpendicular pe direcția de propagare. Când sensul de rotație coincide cu cel trigonometric, câmpul electric este polarizat **circular stânga**. Când sensul de rotație este sensul acelor de ceasornic câmpul electric este polarizat **circular dreapta**. Intensitatea câmpului electric este dată de (6.44) unde

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos(\omega t - kz) , \\ E_y &= E_0 \sin(\omega t - kz) . \end{aligned} \quad (6.46)$$

Din ecuațiile (6.46) și formula fundamentală a trigonometriei

$$\cos^2(\omega t - kz) + \sin^2(\omega t - kz) = 1 ,$$

obținem ecuația unui cerc

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 .$$

În general ($E_1 \neq E_2$ și $\phi_2 \neq \phi_1$ sau $\phi_2 \neq \phi_1 \pm \pi$ sau $\phi_2 \neq \phi_1 \pm \pi/2$) extremitatea vectorului \vec{E} descrie o traiectorie eliptică. Din (6.45) obținem

$$\begin{aligned} \sin(\phi_2 - \phi_1) \cos(\omega t - kz) &= \frac{E_x}{E_1} \sin \phi_2 - \frac{E_y}{E_2} \sin \phi_1 , \\ \sin(\phi_2 - \phi_1) \sin(\omega t - kz) &= \frac{E_x}{E_1} \cos \phi_2 - \frac{E_y}{E_2} \cos \phi_1 . \end{aligned} \quad (6.47)$$

Ridicând relațiile (6.47) la pătrat și folosind formula fundamentală a trigonometriei obținem

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_1 E_2} \cos(\phi_2 - \phi_1) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1) . \quad (6.48)$$

Ecuația (6.48) reprezintă ecuația unei elipse înscrise într-un dreptunghi de laturi $2E_1$ și $2E_2$, cu centrul în origine și cu axele rotite față de axele de coordonate cu unghiul Ψ . Noile axe, ce au versorii \vec{e}'_x și \vec{e}'_y se obțin prin rotirea vechilor axe (de versori \vec{e}_x și \vec{e}_y) cu unghiul Ψ , astfel încât noile axe să se suprapună peste axele elipsei. Noile componente E'_x și E'_y se scriu în funcție de vechile componente E_x și E_y astfel (vezi Fig. 6.1)

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \cos \Psi + E_y \sin \Psi , \\ E'_y &= -E_x \sin \Psi + E_y \cos \Psi . \end{aligned} \quad (6.49)$$

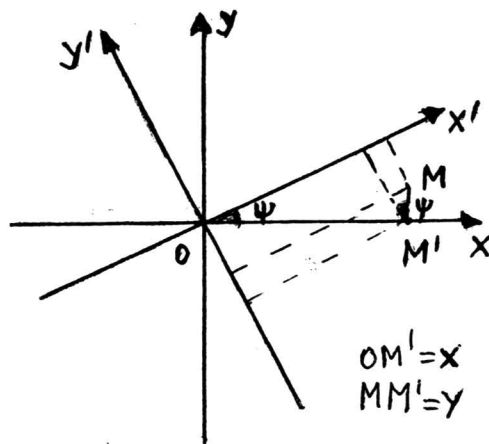


Figura 6.1:

Se introduc expresiile (6.49) în ecuația (6.48). Noile axe devin semiaxele elipsei dacă ecuația elipsei are forma

$$\frac{E_x'^2}{E_1^2} + \frac{E_y'^2}{E_2^2} = 1. \quad (6.50)$$

Ecuația elipsei are forma (6.50) când coeficientul termenului $E'_x E'_y$ este nul, deci

$$2(E_1^2 - E_2^2) \sin \Psi \cos \Psi = 2E_1 E_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) (\cos^2 \Psi - \sin^2 \Psi),$$

de unde

$$\operatorname{tg} 2\Psi = \frac{2E_1 E_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}{E_1^2 - E_2^2}.$$

Expresia (6.44) se poate scrie și sub forma $\vec{E}(z, t) = \operatorname{Re}(\vec{E}_c)$, cu

$$\vec{E}_c = E_1 e^{i(\omega t - kz)} e^{i\phi_1} \vec{e}_x + E_2 e^{i(\omega t - kz)} e^{i\phi_2} \vec{e}_y = E \vec{\epsilon},$$

unde vectorul de polarizație $\vec{\epsilon}$ are expresia

$$\vec{\epsilon} = \left(\frac{E_1}{E} e^{i\phi_1} \vec{e}_x + \frac{E_2}{E} e^{i\phi_2} \vec{e}_y \right) e^{i(\omega t - kz)}.$$

Acest vector are modulul egal cu unitatea $\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}^* = 1$.

Un câmp polarizat linear poate fi reprezentat printr-o suprapunere de câmpuri polarizate circular. Fie un câmp electric polarizat linear după Ox

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x = \frac{E_0}{2} [\vec{e}_x \cos(\omega t - kz) \\ &+ \vec{e}_y \sin(\omega t - kz)] + \frac{E_0}{2} [\vec{e}_x \cos(\omega t - kz) - \vec{e}_y \sin(\omega t - kz)]. \end{aligned}$$

Folosind reprezentarea numerelor complexe putem scrie $\vec{E}(z, t) = \text{Re}(\vec{E}_c)$, cu

$$\vec{E}_c = \frac{E_0}{2} e^{i(\omega t - kz)} (\vec{e}_x + e^{-i\pi/2} \vec{e}_y) + \frac{E_0}{2} e^{i(\omega t - kz)} (\vec{e}_x - e^{-i\pi/2} \vec{e}_y) ,$$

sau $\vec{E}(z, t) = E_0(\vec{e}_- + \vec{e}_+)/\sqrt{2}$. Vectorii de polarizație \vec{e}_- și \vec{e}_+ sunt definiți astfel

$$\vec{e}_{\pm} = \frac{\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - kz)} .$$

Acești vectori au modulul egal cu unitatea $\vec{e}_{\pm} \cdot \vec{e}_{\pm}^* = 1$.

6.7 Aplicații

6.1. Se consideră unda electromagnetică plană ce se propagă în vid pe direcția axei Oz și al cărei câmp electric oscilează după direcția axei Ox :

$$E_x(z, t) = E_m \sin(\omega t - kz) .$$

Folosind ecuațiile Maxwell să se deducă expresia (6.2).

R: Din ecuația Maxwell (6.7) rezultă că

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} = k E_m \cos(\omega t - kz) . \quad (6.51)$$

Din ecuația Maxwell (6.8) rezultă că

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \omega \epsilon_0 \mu_0 E_m \cos(\omega t - kz) . \quad (6.52)$$

Integrând ecuația (6.51) obținem

$$B_y = \frac{k E_m}{\omega} \sin(\omega t - kz) = B_m \sin(\omega t - kz) ,$$

de unde

$$B_m = \frac{k E_m}{\omega} = \frac{E_m}{c} . \quad (6.53)$$

Integrând ecuația (6.52) obținem

$$B_y = \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega E_m}{k} \sin(\omega t - kz) = B_m \sin(\omega t - kz) ,$$

de unde

$$B_m = c\epsilon_0\mu_0 E_m . \quad (6.54)$$

Egalând relațiile (6.53) și (6.54) rezultă

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} .$$

6.2. Se consideră unda electromagnetică plană dată de

$$\vec{E}(z, t) = E_m \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x , \quad (6.55)$$

$$\vec{H}(z, t) = H_m \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y . \quad (6.56)$$

Să se calculeze energia înmagazinată în elementul de volum dV și valoarea medie a vectorului Poynting.

R: Expresia vectorului Poynting este

$$\vec{Y}(z, t) = H_m E_m \sin^2(\omega t - kz) \vec{e}_z . \quad (6.57)$$

Observăm că vectorul Poynting are aceeași direcție cu vectorul de undă \vec{k} . Din (6.55) și (6.56) rezultă că cele două câmpuri sunt în fază (\vec{E} și \vec{H} au valoare maximă în același moment) în orice punct atins de undă.

Energia înmagazinată de câmpul electromagnetic în elementul de volum dV este

$$dW = w dV = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E_m^2 + \mu_0 H_m^2) dV = \frac{E_m H_m}{c} dV = \frac{E_m^2}{c^2 \mu_0} dV = \frac{B_m^2}{\mu_0} dV ,$$

unde $H_m = \epsilon_0 c E_m$ și $B_m = E_m / c$ (vezi problema precedentă).

Valoarea medie a vectorului Poynting este

$$\langle Y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt = \frac{E_m H_m}{2} = \frac{E_m B_m}{2\mu_0} = \frac{\langle E^2 \rangle}{c\mu_0} = \frac{c \langle B^2 \rangle}{\mu_0} ,$$

unde $\langle E^2 \rangle = E_m^2 / 2$ și $\langle B^2 \rangle = B_m^2 / 2$.

6.3. Să se arate că următorul câmp electromagnetic

$$\begin{aligned} E_x &= E_y = 0 , \\ E_z &= c \cos(y - ct) , \\ B_x &= \cos(y - ct) , \\ B_y &= B_z = 0 . \end{aligned}$$

satisface ecuațiile lui Maxwell.

R: Fie ecuația Maxwell $\text{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$. În urma înlocuirilor obținem

$$\begin{aligned}\text{rot}\vec{E} &= \vec{e}_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - \vec{e}_y \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\vec{e}_x c \sin(y - ct) \\ &= -\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial t} [\cos(y - ct)] = -\vec{e}_x \frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

Deci această ecuație Maxwell este satisfăcută.

Fie ecuația Maxwell $\text{rot}\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t$. În urma înlocuirilor obținem

$$\begin{aligned}\text{rot}\vec{B} &= \vec{e}_y \frac{\partial B_x}{\partial z} - \vec{e}_z \frac{\partial B_x}{\partial y} = \vec{e}_z \sin(y - ct) \\ &= \frac{1}{c} \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial t} [\cos(y - ct)] = \frac{1}{c^2} \vec{e}_z \frac{\partial E_z}{\partial t} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Deci această ecuație Maxwell este satisfăcută.

Fie ecuația Maxwell $\text{div}\vec{E} = 0$. În urma înlocuirilor obținem

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 .$$

Deci această ecuație Maxwell este satisfăcută.

Fie ecuația Maxwell $\text{div}\vec{B} = 0$. În urma înlocuirilor obținem

$$\text{div}\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 .$$

Deci această ecuație Maxwell este satisfăcută.

6.4. Câmpul electric al unei unde electromagnetice care se propagă în direcția Oy este

$$\vec{E}(y, t) = E_0 \cos(\omega t - ky) \vec{e}_x .$$

Să se scrie expresia

1. câmpului magnetic al undei,
2. vectorului Poynting,

Să se calculeze $\langle Y \rangle$.

RR

1. $\vec{B}(y, t) = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - ky) \vec{e}_z,$

2. $\vec{Y}(y, t) = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - ky) \vec{e}_y,$

3. $\langle Y \rangle = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}.$

6.5. Câmpul magnetic al unei unde electromagnetice care se propagă în direcția Ox este polarizat linear după Oy . Să se scrie expresia

1. câmpului magnetic al undeii,

2. câmpului electric al undeii,

3. vectorului Poynting,

Să se calculeze $\langle Y \rangle$.

RR

1. $\vec{B}(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y,$

2. $\vec{E}(x, t) = -cB_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z,$

3. $\vec{Y}(x, t) = \frac{cB_0^2}{\mu_0} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x,$

4. $\langle Y \rangle = \frac{cB_0^2}{2\mu_0}.$

6.6. Câmpul magnetic al unei unde electromagnetice oscilează în planul xOz iar direcția de propagare este Oy . Să se scrie expresia

1. câmpului magnetic al undeii,

2. câmpului electric al undeii,

3. vectorului Poynting,

RR

1. $\vec{B}(y, t) = B_1 \cos(\omega t - ky) \vec{e}_x + B_2 \cos(\omega t - ky + \phi) \vec{e}_z,$

$$2. \vec{E}(y, t) = -cB_2 \cos(\omega t - ky + \phi) \vec{e}_x + cB_1 \cos(\omega t - ky) \vec{e}_z ,$$

$$3. \vec{Y}(y, t) = \frac{c}{\mu_0} [B_2^2 \cos^2(\omega t - ky + \phi) + B_1^2 \cos^2(\omega t - ky)] \vec{e}_y .$$

6.7. Câmpul electric al unei unde electromagnetice care se propagă în vid este dat de

$$\vec{E}(z, t) = E_x \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_y \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y .$$

Să se scrie expresia

1. câmpului magnetic al undei,

2. vectorului Poynting.

RR

$$1. \vec{B}(z, t) = -\frac{E_y}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \frac{E_x}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y ,$$

$$2. \vec{Y}(z, t) = \frac{E_y^2 + E_x^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z .$$

6.8. Câmpul electric al unei unde electromagnetice care se propagă în vid în direcția Oz este

$$\vec{D}(z, t) = D_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x .$$

Să se scrie expresia

1. câmpului magnetic al undei,

2. vectorului Poynting.

Să se calculeze $\langle B^2 \rangle$.

RR

$$1. \vec{B}(z, t) = \frac{D_0}{c\epsilon_0} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y ,$$

$$2. \vec{Y}(z, t) = \frac{cD_0^2}{\epsilon_0} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z ,$$

$$3. \langle B^2 \rangle = \frac{D_0^2}{2c\epsilon_0} .$$

6.9. Câmpul magnetic al unei unde electromagnetice care se propagă în vid în direcția Oz este polarizat circular stânga. Să se scrie expresia

1. câmpului magnetic al undeii,
2. câmpului electric al undeii,
3. vectorului Poynting,

RR

1. $\vec{B}(z, t) = B_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + B_0 \sin(\omega t - kz)\vec{e}_y$,
2. $\vec{E}(z, t) = cB_0 \sin(\omega t - kz)\vec{e}_x - cB_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e}_y$,
3. $\vec{Y}(z, t) = \frac{c}{\mu_0} B_0^2 \vec{e}_z$.

Capitolul 7

Câmpul electromagnetic în medii izotrope

Mediile izotrope au aceleași proprietăți fizice în orice direcție. După comportamentul la aplicarea unui câmp electric, aceste medii se împart în trei categorii: conductoare, semiconductoare și izolatori (dielectrici). Substanțele conductoare au o conductivitate electrică foarte mare $\sigma_c \in [10^6, 10^8] \Omega^{-1}m^{-1}$ în timp ce izolatorii foarte mică $\sigma_i \in [10^{-20}, 10^{-12}] \Omega^{-1}m^{-1}$. Conductivitatea semiconductorilor $\sigma_s \in [10^{-8}, 10^4] \Omega^{-1}m^{-1}$ este cuprinsă între cea a substanțelor conductoare și cea a izolatorilor, crescând puternic cu temperatura.

Substanțele conductoare sunt metalele și majoritatea aliajelor lor (în care conducția este realizată de electronii liberi) sau electroliții (în care conducția este realizată de ioni pozitivi și negativi existenți).

Deoarece în metale electronii de valență ai atomilor sunt slab legați de atomi, ei se pot deplasa liber. Metalele (corpuri solide cristaline) sunt constituite dintr-o rețea regulată de ioni pozitivi, în interiorul căreia se mișcă dezordonat electronii liberi, ce formează așa numitul **gaz electronic**. Electronii liberi interacționează cu ioni pozitivi din nodurile rețelei prin forțe de natură electrostatică (legătura metalică) realizând stabilitatea rețelei. Când metalului i se aplică un câmp electric electronii liberi vor executa o mișcare ordonată în direcția câmpului extern. Apare deci un curent electric. Concentrația electronilor liberi (purători de sarcină mobili) fiind mare (de ordinul $10^{28} m^{-3}$ la orice temperatură) rezultă că metalele sunt bune conducătoare de electricitate la orice temperatură.

Ionii din nodurile rețelei execută o mișcare de vibrație în jurul pozițiilor lor de echilibru. Cu creșterea temperaturii această mișcare devine din ce în ce mai pronunțată, iar probabilitatea ca electronii liberi să se ciocnească cu ioni din nodurile rețelei cristaline crește. Deci, rezistența electrică a metalelor (determinată de frecvența

ciocnirilor electronilor liberi cu ionii pozitivi din nodurile rețelei) crește cu temperatura. Prin urmare, conductibilitatea metalelor scade cu creșterea temperaturii.

Corpurile nemetalice sunt caracterizate prin aceea că electronii de valență sunt legați de ioni, având o mișcare localizată în jurul unui atom sau în jurul a doi atomi. Acestor substanțe le sunt specifice legătura ionică sau legătura covalentă.

Legătura ionică se întâlnește la corpurile alcătuite din două tipuri de atomi, dintre care unii pot pierde relativ ușor electronii lor de valență iar ceilalți au tendința de a-și atașa ușor electroni suplimentari. Prin trecerea electronilor de valență de la primul tip de atomi la al doilea, apar perechi de ioni pozitivi și negativi ce se atrag puternic. Neexistând purtători de sarcină liberi, aceste materiale sunt izolatoare până la temperaturi înalte la care prezintă conductivitate ionică.

Legătura covalentă se întâlnește la corpurile solide alcătuite dintr-un singur tip de atomi, sau din atomi nu prea diferiți între ei. În acest caz, cei doi electroni de valență, câte unul pentru fiecare atom, devin comuni atomilor. Acest tip de legătură se întâlnește la elementele din grupa a patra a sistemului periodic. La temperaturi coborâte electronii sunt reținuți în legăturile covalente. Lipsa purtătorilor de sarcină liberi face ca la aceste temperaturi corpurile să se comporte ca medii izolatoare. La temperaturi mai ridicate unii electroni de valență primesc energia necesară pentru a părăsi legăturile covalente și a deveni liberi, întocmai ca electronii dintr-un metal. Existând electroni liberi (numiți **electroni de conducție**), la aplicarea unui câmp electric, corpul va fi străbătut de un curent electric. Cu cât va fi mai mare temperatura, cu atât va fi mai mare numărul electronilor de conducție, respectiv conductivitatea electrică a corpului considerat. Aceste materiale se numesc semiconductoare.

Dielectricii (izolatorii) sunt substanțele în care sarcinile electrice sunt legate. Ei se prezintă sub toate formele de agregare. În izolatori, sarcinile electrice sunt legate la nivelul atomilor (ce au configurația electronică a gazelor inerte), ale moleculelor covalente (de tipul H_2 , O_2 , etc.) sau al moleculelor ionice (de tipul halogenuri). În cazul dielectricilor atomici, momentul dipolar este zero, deoarece distribuția de electroni are simetrie sferică pentru orice atom în starea fundamentală (cu energia cea mai joasă), indiferent câți electroni conține. Un câmp electric aplicat acestui dielectric va deforma atomul. Atomul deformat va avea un moment dipolar nenul, deoarece centrul sarcinilor electrice pozitive nu va mai coincide cu cel al sarcinii electrice negative.

În cazul moleculelor formate din doi atomi de același fel (de exemplu O_2) momentul dipolar este nul. Sarcina electrică netă a moleculei este nulă $\sum_j q_j = 0$ ($\sum_j q_j^+ = -\sum_j q_j^-$). Centrele de sarcină se determină analog cu centrul de masă. Coordonatele centrului sarcinilor electrice pozitive sunt

$$\xi^+ = \frac{\sum_i q_i^+ x_i^+}{\sum_i q_i^+}, \quad \eta^+ = \frac{\sum_i q_i^+ y_i^+}{\sum_i q_i^+}, \quad \zeta^+ = \frac{\sum_i q_i^+ z_i^+}{\sum_i q_i^+}.$$

Similar cele ale centrului sarcinilor electrice negative sunt

$$\xi^- = \frac{\sum_i q_i^- x_i^-}{\sum_i q_i^-}, \quad \eta^- = \frac{\sum_i q_i^- y_i^-}{\sum_i q_i^-}, \quad \zeta^- = \frac{\sum_i q_i^- z_i^-}{\sum_i q_i^-}.$$

Din cauza simetriei moleculei, în absența câmpului electric centrele sarcinilor electrice pozitive și cele ale sarcinilor electrice negative coincid

$$\xi^- = \xi^+, \quad \eta^- = \eta^+, \quad \zeta^- = \zeta^+.$$

Aceste molecule se numesc nepolare. În moleculele formate din atomi diferiți (de exemplu CH_3) centrul sarcinilor electrice pozitive nu coincide cu cel al sarcinilor electrice negative, momentul dipolar fiind deci, diferit de zero. Aceste molecule se numesc polare.

7.1 Modelul oscilatorului armonic

Considerăm un dielectric atomic asupra căruia se transmite un fascicul de radiație electromagnetică de pulsație ω . Modelul oscilatorului armonic presupune că electronii de valență ai atomului se comportă ca niște oscilatori sub acțiunea forței electrice $e\vec{E}$, (e sarcina electrică a electronului, iar \vec{E} intensitatea câmpului electric) exercitată de câmpul electromagnetic aplicat atomului. Deoarece electronii sunt legați, ei vor executa o mișcare oscilatorie amortizată forțată. Considerăm cazul în care câmpul electromagnetic este polarizat linear de-a lungul axei Ox , deci electronul va executa o oscilație forțată sub acțiunea forței

$$F = eE = eE_0 e^{i\omega t}. \quad (7.1)$$

Ecuția de mișcare pentru electron este

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - m\gamma \frac{dx}{dt} + F, \quad (7.2)$$

unde ω_0 este pulsația proprie a electronului, m este masa sa. Termenul al doilea din membrul drept reprezintă o forță de amortizare. Substituind expresia lui F în ecuația (7.2) obținem ecuația diferențială neomogenă

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (7.3)$$

Căutăm o soluție particulară de forma

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t}. \quad (7.4)$$

Introducând (7.4) în (7.3) obținem

$$x_0 = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} .$$

Prin urmare

$$x = \frac{eE/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} . \quad (7.5)$$

Deci momentul dipolar, $p = ex$, indus atomului are expresia

$$p = \frac{e^2 E/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} . \quad (7.6)$$

Notând cu N numărul de atomi din unitatea de volum, polarizația P a dielectricului este $P = Np = Nex$. Observăm că

$$\frac{dP}{dx} = Ne , \quad (7.7)$$

unde Ne reprezintă sarcina electrică legată din unitatea de volum (din interiorul dielectricului) luată cu semn schimbat.

În cazul ales de noi (câmpul electromagnetic polarizat linear de-a lungul axei Ox) electronul execută o mișcare unidimensională, iar vectorul polarizație este orientat de-a lungul axei Ox , deci $\vec{P}(P, 0, 0)$. Prin urmare

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{dP}{dx} . \quad (7.8)$$

Din (7.7) și (7.8) rezultă că

$$\operatorname{div} \vec{P} = Ne . \quad (7.9)$$

În cazul dielectricilor izotropi, vectorul polarizație \vec{P} este paralel cu intensitatea câmpului electric \vec{E} aplicat

$$\vec{P} = N\epsilon_0\alpha\vec{E} , \quad (7.10)$$

unde ϵ_0 este permitivitatea dielectrică a vidului, iar α este polarizabilitatea atomică. Substituind expresia (7.6) în (7.10) găsim pentru polarizabilitatea atomică α expresia

$$\alpha = \frac{e^2/(m\epsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} . \quad (7.11)$$

În cazul câmpurilor constante, adică $\omega = 0$, expresia (7.11) devine

$$\alpha = \frac{e^2}{m\epsilon_0\omega_0^2} . \quad (7.12)$$

7.2 Ecuațiile lui Maxwell într-un mediu dielectric izotrop

Pe un dielectric se poate adăuga sau îndepărta sarcină electrică prin electrizare. Această sarcină electrică se numește adesea **sarcină liberă**. Sarcinile electrice care aparțin atomilor sau moleculelor dielectricului se numesc adesea **sarcini legate**. Aceste sarcini nu sunt mobile, dar contribuie la polarizarea dielectricului prin oscilațiile în jurul pozițiilor lor de echilibru.

Sub acțiunea unui câmp electric \vec{E} dielectricul este polarizat, densitatea de sarcină electrică totală devenind

$$\rho = \rho_{\text{liber}} + \rho_{\text{legat}} , \quad (7.13)$$

unde $\rho_{\text{legat}} = -\text{div } \vec{P}$ (vezi secțiunea 1).

Ecuația lui Maxwell $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ devine în acest caz

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{liber}} - \text{div } \vec{P}}{\epsilon_0} . \quad (7.14)$$

Prin urmare $\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{liber}} = \text{div } \vec{D}$, de unde

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} . \quad (7.15)$$

În medii izotrope permitivitatea dielectrică ϵ a mediului este un scalar, deci cei doi vectori \vec{E} și \vec{D} sunt paraleli.

Mărimea $\partial \vec{P} / \partial t$ are dimensiunile unei densități de curent. Ea reprezintă densitatea curentului (\vec{j}_{legat}) de sarcină electrică legată.

Densitatea de curent totală devine

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{liber}} + \vec{j}_{\text{legat}} , \quad (7.16)$$

unde \vec{j}_{liber} este densitatea curentului de sarcină liberă.

Ecuația lui Maxwell

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ,$$

devine

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{liber}} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} . \quad (7.17)$$

Materialele dielectrice neavând proprietăți magnetice ($\mu_r = 1$) avem

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} .$$

În cazul în care dielectricul nu este electrizat $\rho_{liber} = 0$ și $\vec{j}_{liber} = 0$. Prin urmare ecuațiile lui Maxwell se scriu în acest caz sub forma

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (7.18)$$

$$rot \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \quad (7.19)$$

$$div \vec{B} = 0 , \quad (7.20)$$

$$div \vec{E} = -\frac{div \vec{P}}{\epsilon_0} . \quad (7.21)$$

Sau

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (7.22)$$

$$rot \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} , \quad (7.23)$$

$$div \vec{B} = 0 , \quad (7.24)$$

$$div \vec{D} = 0 . \quad (7.25)$$

7.3 Ecuația de propagare a undelor electromagnetice în medii dielectrice

Considerăm cazul dielectricului neelectrizat ($\rho_{liber} = 0$ și $\vec{j}_{liber} = 0$). Aplicăm operatorul *rotor* ecuației Maxwell (7.18), deci

$$rot (rot \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} rot \vec{B} . \quad (7.26)$$

Substituind (7.19) în (7.26) obținem

$$rot(rot \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} .$$

Folosind formula

$$rot(rot \vec{a}) = grad(div \vec{a}) - \Delta \vec{a} ,$$

cu $\vec{a} = \vec{E}$ și ecuația Maxwell (7.21) obținem ecuația

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0} grad (div \vec{P}) = 0 , \quad (7.27)$$

ce reprezintă ecuația de propagare a câmpului electromagnetic într-un mediu dielectric izotrop.

Similar, putem scrie ecuația diferențială satisfăcută de inducția magnetică (\vec{B})

$$\Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{P}) = 0 . \quad (7.28)$$

Considerăm cazul particular în care câmpul electric \vec{E} se propagă în direcția axei Oz și este polarizat linear în direcția axei Ox

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)} . \quad (7.29)$$

Mediul fiind izotrop, vectorul polarizație \vec{P} are direcția axei Ox și este proporțional cu \vec{E} , deci în cazul ales de noi

$$P_x = N \epsilon_0 \alpha E_x , \quad \text{div } \vec{P} = 0 .$$

Ecuația (7.27) devine

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} . \quad (7.30)$$

Substituind (7.29) în (7.30) obținem

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + N\alpha) . \quad (7.31)$$

În cazul unui mediu nemagnetic ($\mu_r = 1$) indicele de refracție este

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r} = \frac{ck}{\omega} . \quad (7.32)$$

Din (7.31), (7.32) și (7.11) obținem că

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2/(m\epsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} . \quad (7.33)$$

Deci indicele de refracție este un număr complex

$$n = n_r - in_i . \quad (7.34)$$

Conform (7.33) indicele de refracție depinde de frecvența undei electromagnetice, deci dielectricul se comportă ca un mediu dispersiv. Introducând (7.34) în (7.29) putem scrie

$$E_x = E_0 e^{i\omega(t - nz/c)} = E_0 e^{-n_i \omega z/c} e^{i\omega(t - n_r z/c)} . \quad (7.35)$$

Ecuția (7.35) este ecuația unei unde de amplitudine $E_0 \exp(-n_i \omega z/c)$ ce se propagă cu viteza c/n_r . Intensitatea undei în mediul dielectric este

$$I = E_x \cdot E_x^* = I_0 e^{-2n_i \omega z/c} = I_0 e^{-2n_i k z} = I_0 e^{-\beta z}, \quad (7.36)$$

unde $\beta = 2n_i k = 4\pi n_i/\lambda_0$ este coeficientul de absorbție.

Observăm că, intensitatea undei (într-un mediu dielectric) depinde de lungimea de undă λ_0 a radiației în vid și de natura materialului prin n_i .

Conform relației (7.36) unda este atenuată la trecerea prin materialul dielectric. Dacă este îndeplinită condiția $\beta d < 1$ unde d este grosimea materialului, acesta este transparent pentru undă.

Permitivitatea relativă a mediului ($\epsilon_r = n^2$) are expresia

$$\epsilon_r = 1 + \frac{Ne^2/(m\epsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (7.37)$$

Pentru $\omega = \omega_0$ relația (7.37) devine

$$\epsilon_r = 1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega_0\gamma} i. \quad (7.38)$$

7.4 Ecuția de propagare a undelor electromagnetice în medii conductoare

Ecuțiile lui Maxwell pentru medii conductoare sunt

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.39)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (7.40)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (7.41)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad (7.42)$$

unde \vec{j} reprezintă densitatea de curent corespunzător sarcinilor electrice libere (electroni sau ioni ce realizează conducția electrică).

Ecuțiile (7.39)-(7.42) se pot scrie și sub forma

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.43)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (7.44)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (7.45)$$

$$\text{div } \vec{D} = 0. \quad (7.46)$$

În cazul mediilor conductoare este valabilă legea Ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} . \quad (7.47)$$

Aplicând operatorul *rotor* ecuației (7.39) și ținând cont de ecuația (7.40) obținem

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} . \quad (7.48)$$

Dar

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} .$$

Folosind ecuațiile (7.42) și (7.47) obținem ecuația diferențială

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 , \quad (7.49)$$

ce reprezintă ecuația de propagare a câmpului electromagnetic într-un mediu conductor izotrop.

Similar, putem scrie ecuația diferențială satisfăcută de inducția magnetică (\vec{B})

$$\Delta \vec{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 . \quad (7.50)$$

Considerăm cazul particular în care câmpul electric \vec{E} se propagă în direcția axei Oz și este polarizat linear în direcția axei Ox , deci

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)} . \quad (7.51)$$

Introducând (7.51) în (7.49) obținem

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - i \omega \mu \sigma . \quad (7.52)$$

Deci numărul de undă este un număr complex

$$k = k_r - i k_i . \quad (7.53)$$

Introducând (7.53) în (7.51) putem scrie

$$E_x = E_0 e^{-k_i z} e^{i(\omega t - k_r z)} . \quad (7.54)$$

Intensitatea undei în mediul conductor este

$$I = I_0 e^{-2k_i z} = I_0 e^{-\beta z} , \quad (7.55)$$

unde $\beta = 2k_i$ este coeficientul de absorbție.

Se numește adâncime de pătrundere a undei în mediu, distanța δ pentru care intensitatea undei scade de e ori. Din (7.55) rezultă $\beta\delta = 2k_i\delta = 1$, de unde

$$\delta = \frac{1}{2k_i} . \quad (7.56)$$

Ținând cont că $k = \omega/v = n\omega/c$ din (7.52) obținem

$$n^2 = \epsilon_r \mu_r - i \frac{\mu_r \sigma}{\omega \epsilon_0} . \quad (7.57)$$

Deci indicele de refracție n poate fi scris sub forma unui număr complex

$$n = n_r - i n_i . \quad (7.58)$$

Pentru medii conductoare $\mu_r = 1$, deci

$$n^2 = \epsilon_r - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} . \quad (7.59)$$

La frecvențe joase, deoarece $\sigma/(\omega \epsilon_0) \gg 1$ putem scrie că

$$n^2 = -i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} e^{-i\pi/2} , \quad (7.60)$$

de unde

$$n = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}} e^{-i\pi/4} = (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}} , \quad (7.61)$$

deci

$$n_i = n_r = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}} . \quad (7.62)$$

La frecvențe înalte, deoarece $1 \gg \sigma/(\omega \epsilon_0)$ avem

$$n^2 = \epsilon_r , \quad (7.63)$$

deci indicele de refracție n devine real.

Din (7.58) și (7.57) rezultă că

$$n_r = \left[\frac{1}{2} \left(\epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 \omega^2}} \right) \right]^{1/2} , \quad (7.64)$$

$$n_i = \frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \left(\epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 \omega^2}} \right) \right]^{-1/2} . \quad (7.65)$$

Viteza de propagare a undelor electromagnetice în metale este

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n_r} . \quad (7.66)$$

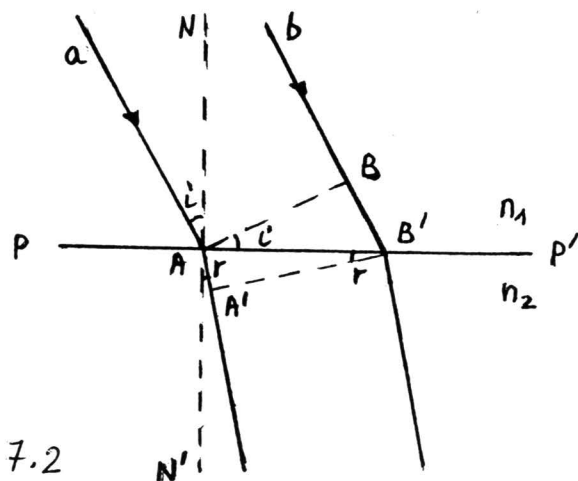
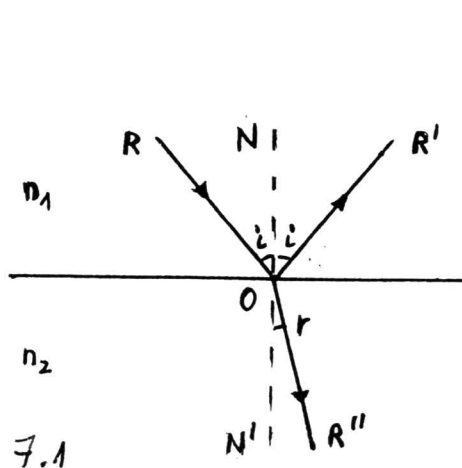


Figura 7.1: & 7.2

7.5 Reflexia și refracția luminii

Fie o undă luminoasă care cade pe o suprafață ce separă două medii izotrope de indici de refracție diferiți. La această suprafață de separare au loc trei fenomene:

1. reflexia (unda reflectată se întoarce în mediul din care a venit),
2. refracția (unda refractată străbate mediul al doilea și este transmisă, schimbându-și direcția și viteza de propagare),
3. absorbția (unda refractată este de asemenea și atenuată).

Legile reflexiei, cunoscute încă din antichitate, arată că:

1. raza incidentă RO , raza reflectată OR' și normala la suprafața de separație N se găsesc în același plan, numit planul de incidență (vezi Fig. 7.1),
2. unghiul de incidență i este egal cu unghiul de reflexie i' .

Dacă mediul al doilea este mai dens decât primul, raza reflectată și cea incidentă oscilează în opoziție de fază ($\Delta\phi = \pi$).

Când raza cade normal pe suprafața de separare (incidență normală) atunci $i = 0$.

Legile refracției arată că în mediile izotrope:

1. raza incidentă RO , raza reflectată OR' și normala la suprafața de separație N se găsesc în același plan (vezi Fig. 7.2). Acest lucru nu se întâmplă în mediile anizotrope (ale căror proprietăți nu sunt aceleași în orice direcție),

2. raportul între viteza de propagare în primul mediu (v_1) și cea în mediul al doilea (v_2) este constant și egal cu raportul sinusului unghiului de incidență i și cel al unghiului de refracție r

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin i}{\sin r} . \quad (7.67)$$

Această relație se deduce ușor cu ajutorul principiului Huygens. Fie un fascicul de raze paralele ab ce cade pe suprafața de separare PP' a două medii izotrope cu indici de refracție diferiți. În momentul când raza a atinge suprafața de separație în punctul A , frontul de undă este AB . Până ce raza b ajunge și ea la suprafața de separație, raza a se propagă în mediul al doilea cu o viteză mai mică decât în mediul din care a venit, dacă $n_2 > n_1$. Fiecare distanță AA' și BB' (cele două distanțe sunt parcurse în același timp) este proporțională cu viteza luminii în mediul respectiv. Din triunghiurile dreptunghice ABB' și $B'AA'$ avem

$$BB' = AB' \cdot \sin i , \quad AA' = AB' \cdot \sin r .$$

Împărțindu-le obținem

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin i}{\sin r} = n , \quad (7.68)$$

de unde $\sin i = n \sin r$. În relația (7.68) n este indicele de refracție al mediului 2 în raport cu mediul 1. Indicii de refracție variază cu temperatura și cu lungimea de undă a luminii utilizate.

În cazul incidenței normale, razele de lumină își continuă drumul nedeviate în mediul al doilea, deoarece unghiul de incidență (i) fiind zero și unghiul de refracție (r) va fi zero.

Când raza de lumină trece dintr-un mediu mai puțin dens într-unul mai dens, atunci raza refractată se va apropia de normală ($r < i$). Dacă $i = \pi/2$ (incidență razantă) unghiul r va avea o valoare maximă, numită unghi limită, notat cu l :

$$\sin l = \frac{n_1}{n_2} . \quad (7.69)$$

Când raza de lumină trece dintr-un mediu mai dens într-unul mai puțin dens, pentru ca raza să poată ieși, trebuie ca unghiul de incidență să fie mai mic decât unghiul limită ($i < l$). În acest caz raza refractată se va depărta de normală. Dacă unghiul de incidență este egal cu unghiul limită ($i = l$), raza se propagă razant (de-a lungul suprafeței de separație).

Dacă $i > l$, atunci razele din mediul mai dens se vor reflecta pe suprafața de separație, netrecând nici una în mediul mai puțin dens. În acest caz, reflexia este totală.

7.6 Energia transportată de undele electromagnetice

Inmulțim scalar cu \vec{E} și \vec{H} următoarele ecuații Maxwell

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Scăzând relațiile obținute, rezultă

$$\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right). \quad (7.70)$$

Folosind formula $\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{u} - \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v}$, primul membru din (7.70) devine $-\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\text{div } \vec{Y}$, unde \vec{Y} este vectorul Poynting. Termenul al doilea din membrul drept reprezintă densitatea de energie a câmpului electromagnetic în unitatea de timp. Integrând ecuația (7.70) obținem

$$-\frac{dW_{em}}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \Phi_S, \quad (7.71)$$

unde

$$\frac{dQ}{dt} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

reprezintă căldura degajată în unitatea de timp prin efect Joule în mediul respectiv,

$$\Phi_S = \int_V \text{div } \vec{Y} dV = \oint_S \vec{Y} \cdot d\vec{S}$$

reprezintă fluxul vectorului Poynting ce străbate suprafața închisă S ce delimitează volumul V , iar

$$-\frac{dW_{em}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV$$

este fluxul de energie electromagnetică ce iese în unitatea de timp prin suprafața S .

Relația (7.71) reprezintă legea conservării energiei câmpului electromagnetic.

Viteza cu care se propagă energia se numește viteză de grup, definită de

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (7.72)$$

Viteza cu care se propagă unda se numește viteză de fază

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \quad (7.73)$$

de unde

$$v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk}. \quad (7.74)$$

Folosind relația

$$dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

expresia (7.74) devine

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}. \quad (7.75)$$

Relația (7.75) este cunoscută sub denumirea de relația Rayleigh.

Dacă viteza de fază nu depinde de frecvența undei sau de numărul de undă, cele două viteze sunt egale

$$v_g = v_f.$$

În acest caz mediul se numește **nedispersiv**. Pentru vid există relația $v_g = v_f = c$.

Dacă viteza de fază depinde de frecvența undei sau de numărul de undă, mediul se numește **dispersiv**.

Pentru un mediu de indice de refracție $n = c/v_f$ putem scrie

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}. \quad (7.76)$$

7.7 Aplicații

7.1. O undă electromagnetică plană $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ se propagă într-un mediu de permitivitate dielectrică ϵ_0 și permeabilitate magnetică μ_0 , astfel încât densitatea de curent este \vec{j} . Să se arate că pătratul numărului de undă este un număr complex. De asemenea, să se determine distanța δ după care câmpul se reduce de e ori.

R: Folosim ecuațiile lui Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.77)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (7.78)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad (7.79)$$

și forma locală a legii lui Ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} . \quad (7.80)$$

Aplicând operatorul *rotor* ecuației (7.77) și ținând cont că

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) &= \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} , \\ \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} , \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -i\omega \vec{E} , \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \vec{E} . \end{aligned}$$

Obținem

$$\left[\Delta + \omega^2 \mu_0 \left(\epsilon_0 + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \right] \vec{E} = 0 . \quad (7.81)$$

Din (7.81) rezultă că mediul are permitivitatea complexă

$$\epsilon = \epsilon_0 + i \frac{\sigma}{\omega} . \quad (7.82)$$

Pătratul numărului de undă este și el complex

$$\tilde{k}^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 + i\omega \mu_0 \sigma . \quad (7.83)$$

Scriem numărului de undă complex sub forma

$$\tilde{k} = k + i\alpha/2 \quad (7.84)$$

Intensitatea câmpului electric are deci expresia

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(k\vec{l}_k \cdot \vec{r} - \omega t)] \exp(-\vec{l}_k \cdot \vec{r} \alpha/2) ,$$

unde $\vec{l}_k = \vec{k}/k$ este versorul vectorului de undă \vec{k} . Intensitatea unei electrice I_E are expresia

$$I_E = \vec{E} \cdot \vec{E}^* = I_0 \exp(-\vec{l}_k \cdot \vec{r} \alpha) ,$$

unde $I_0 = \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*$. Deci unda electromagnetică dată se atenuează.

Ridicând relația (7.84) la pătrat și introducând-o în (7.83) obținem

$$\begin{aligned} \alpha k &= \omega \mu_0 \sigma , \\ k^2 - \alpha^2/4 &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 , \end{aligned}$$

de unde $\alpha^2 = 2\omega^2 \mu_0 [\epsilon_0 + (\epsilon_0^2 + \sigma^2/\omega^2)^{1/2}]$.

Să considerăm că unda se propagă în direcția Oz , adică $I_E = I_0 \exp(-\alpha z)$. Câmpul se reduce de e ori după ce parcurge distanța

$$\delta = \frac{\alpha}{2} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} + \frac{\mu_0}{2} \sqrt{\epsilon_0^2 + \sigma^2 / \omega^2}.$$

7.2. Intr-un supraconductor, expresia legii Ohm este înlocuită cu expresia $\text{rot } \vec{j} = -\vec{B}$, unde $\Lambda = m/(ne^2)$, n fiind densitatea de electroni. Cu ajutorul ecuațiilor Maxwell să se determine ecuația diferențială pe care o satisface \vec{B} .

R: Considerăm ecuația Maxwell

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Aplicând operatorul *rotor* acestei ecuații și ținând cont că

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) &= \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}, \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{rot} \vec{j} &= -\frac{1}{\Lambda} \vec{B}. \end{aligned}$$

Obținem ecuația diferențială pe care o satisface \vec{B} :

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{\Lambda} \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (7.85)$$

Dacă câmpul magnetic depinde doar de coordonatele spațiale, atunci

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{\Lambda} \vec{B}. \quad (7.86)$$

Dacă supraconductorul umple semispațiul $x \geq 0$ ecuația diferențială (7.86) devine

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{\mu_0}{\Lambda} B. \quad (7.87)$$

Ea admite soluția $B = B_0 \exp(-x/\lambda)$, unde $\lambda = (\Lambda/\mu_0)^{1/2}$.

Capitolul 8

Câmpul electromagnetic în medii anizotrope

Mediile anizotrope nu au aceleași proprietăți fizice în toate direcțiile. În aceste medii parametrii elastici și electricsi sunt mărimi tensoriale.

8.1 Structura undei electromagnetice

Considerăm un mediu anizotrop fără sarcini electrice libere ($\rho = 0$), fără curenți electricsi ($j = 0$) și în care permeabilitatea magnetică μ este un scalar (vectorii inducție magnetică \vec{B} și intensitatea câmpului magnetic \vec{H} sunt paraleli ($\vec{B} \parallel \vec{H}$)). Ecuațiile lui Maxwell se scriu în acest caz

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (8.1)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (8.2)$$

$$\text{div } \vec{D} = 0, \quad (8.3)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (8.4)$$

Deoarece permitivitatea dielectrică ϵ este un tensor pentru care $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$, ecuația $\text{div } \vec{D} = 0$ ($\vec{D} = \epsilon \vec{E}$) nu se mai poate scrie $\text{div } \vec{E} = 0$, ca în cazul mediilor izotrope.

Considerăm de asemenea, că în mediul anizotrop se propagă o undă plană monocromatică de pulsație ω :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (8.5)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (8.6)$$

$$\vec{D} = \vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (8.7)$$

unde $i^2 = -1$, \vec{r} este vectorul de poziție al punctului în care a ajuns unda la momentul t , iar \vec{k} este vectorul de undă de modul $k = \omega/v$ cu v viteza de fază. Din ecuațiile (8.3), (8.4), (8.6) și (8.7) rezultă că

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 , \quad (8.8)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0 . \quad (8.9)$$

Deci, vectorul \vec{k} este perpendicular pe vectorii \vec{D} și \vec{H} (vectorii \vec{D} și \vec{H} sunt transversali). Se observă că \vec{E} nu este perpendicular pe vectorul de undă, adică nu este conținut în planul undei. Introducând (8.5) și (8.6) în (8.1) obținem

$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu\omega\vec{H} . \quad (8.10)$$

Din (8.6), (8.7) și (8.2) rezultă

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega\vec{D} . \quad (8.11)$$

Conform ecuațiilor (8.10) și (8.11), vectorul \vec{H} este perpendicular pe vectorii \vec{D} , \vec{E} și \vec{k} , deci cei trei vectori \vec{D} , \vec{E} și \vec{k} sunt coplanari.

Eliminăm vectorul \vec{H} între cele două ecuații (8.10) și (8.11), rezultă pentru vectorul inducție electrică expresia

$$\vec{D} = \frac{1}{\mu\omega^2} \vec{k} \times (\vec{E} \times \vec{k}) . \quad (8.12)$$

Ținând cont de relația

$$\vec{k} \times (\vec{E} \times \vec{k}) = k^2 \vec{E} - (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} ,$$

ecuația (8.12) devine

$$\vec{D} = \frac{1}{\mu v^2} \left[\vec{E} - \left(\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{E} \right) \frac{\vec{k}}{k} \right] .$$

Dacă direcția de propagare este paralelă cu axa Oz ($\vec{k}/k = \vec{e}_z$) avem

$$D_x = \frac{E_x}{\mu v^2} , \quad D_y = \frac{E_y}{\mu v^2} , \quad D_z = 0 .$$

Notăm cu $\vec{\mathfrak{N}}$ versorul direcției vectorului Poynting $\vec{Y} = \vec{E} \times \vec{H}$. Deoarece $\vec{\mathfrak{N}}$ este perpendicular pe \vec{E} și \vec{H} , va fi coplanar cu vectorii \vec{D} , \vec{E} și \vec{k} (vezi Fig. 8.1). Direcția vectorului de undă \vec{k} se numește **direcția undei**, iar cea a lui $\vec{\mathfrak{N}}$ se numește **direcția razei**, ce reprezintă direcția de transmitere a energiei electromagnetice.

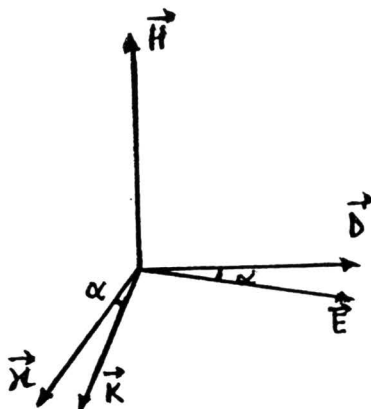


Figura 8.1:

8.2 Relația între \vec{D} și \vec{E}

În mediile anizotrope vectorul inducție electrică \vec{D} nu are aceeași direcție cu vectorul intensitatea \vec{E} câmpului electric

$$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E}, \quad (8.13)$$

unde $[\epsilon]$ este tensorul permitivitate electrică. Relația (8.13) se poate scrie matricial

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

unde D_x , D_y și D_z sunt componentele vectorului \vec{D} pe axele de coordonate, E_x , E_y și E_z sunt componentele vectorului \vec{E} pe axele de coordonate. Matricea

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

se numește **matricea tensorului permitivitate electrică**. Elementele acestei matrici satisfac relațiile

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}, \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}, \quad \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}.$$

Se poate alege un sistem de axe de coordonate astfel încât $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = 0$, deci

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

Aceste axe de coordonate sunt axele cristalografice ale cristalului. Ele se numesc **axe principale**. Constantele dielectrice ϵ_x , ϵ_y și ϵ_z se numesc constante dielectrice principale. Relația (8.14) se poate scrie

$$D_x = \epsilon_x E_x, \quad D_y = \epsilon_y E_y, \quad D_z = \epsilon_z E_z. \quad (8.15)$$

Dacă câmpul electric \vec{E} este polarizat linear, de exemplu după axa Ox , atunci $E_y = 0$ și $E_z = 0$. Prin urmare $D_x = \epsilon_x E_x$, $D_y = D_z = 0$, deci vectorii \vec{D} și \vec{E} sunt paraleli.

În concluzie, când vectorul intensitatea câmpului electric, \vec{E} , este orientat de-a lungul uneia din axele principale, atunci vectorul inducție electrică, \vec{D} , este paralel cu \vec{E} . În toate celelalte cazuri, \vec{D} are o direcție diferită de cea a lui \vec{E} .

8.3 Ecuația lui Fresnel

Se aplică operatorul *rotor* asupra ecuației Maxwell (8.1). Folosind ecuația (8.2) obținem

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}.$$

Folosind identitatea $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ avem

$$\Delta \vec{E} - \text{grad}(\text{div } \vec{E}) = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \quad (8.16)$$

Relația (8.16) este valabilă pentru medii anizotrope fără proprietăți magnetice ($\mu = \mu_0$). Considerăm cazul în care prin mediul anizotrop se propagă o undă electromagnetică după direcția \vec{k} . Vectorii \vec{E} și \vec{D} au expresiile

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \quad (8.17)$$

$$\vec{D} = \vec{D}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]. \quad (8.18)$$

Se proiectează ecuația (8.16) pe axele de coordonate. Proiecția pe axa Ox este

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2}.$$

Ținând cont de relațiile (8.17) și (8.18) obținem

$$E_x - \left(\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{E} \right) \frac{k_x}{k} = \mu v^2 D_x.$$

Proiecțiile pe axele Oy și Oz vor avea expresii analoage. Notăm cu

$$\alpha = \frac{k_x}{k}, \quad \beta = \frac{k_y}{k}, \quad \gamma = \frac{k_z}{k},$$

parametrii numiți **coșinușii directori** ai versorului (\vec{k}/k) vectorului de undă. În final se obțin ecuațiile

$$\begin{aligned}\mu v^2 D_x &= E_x - \alpha \left(\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{E} \right), \\ \mu v^2 D_y &= E_y - \beta \left(\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{E} \right), \\ \mu v^2 D_z &= E_z - \gamma \left(\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{E} \right),\end{aligned}\tag{8.19}$$

sau $\mu v^2 \vec{D} = \vec{E} - \frac{\vec{k}}{k} \left(\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{E} \right).$

Utilizând relațiile (8.15), găsim următoarele relații între componentele vectorilor \vec{D} și \vec{E}

$$D_x = \frac{\alpha \left(\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{E} \right)}{\mu(v_x^2 - v^2)}, \quad D_y = \frac{\beta \left(\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{E} \right)}{\mu(v_y^2 - v^2)}, \quad D_z = \frac{\gamma \left(\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{E} \right)}{\mu(v_z^2 - v^2)},$$

unde $v_x^2 = 1/(\mu\epsilon_x)$, $v_y^2 = 1/(\mu\epsilon_y)$ și $v_z^2 = 1/(\mu\epsilon_z)$ sunt vitezele principale ale undelor plane ce se propagă de-a lungul axelor principale. Vitezele principale sunt parametri ai mediului.

Ținând cont de faptul că vectorul \vec{D} este transversal ($\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$ sau $\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{D} = \alpha D_x + \beta D_y + \gamma D_z = 0$) avem

$$\frac{\alpha^2}{v_x^2 - v^2} + \frac{\beta^2}{v_y^2 - v^2} + \frac{\gamma^2}{v_z^2 - v^2} = 0,\tag{8.20}$$

ecuație ce poartă numele de **ecuația Fresnel**. Ea permite calcularea vitezei de fază v în funcție de parametrii mediului (vitezele principale) și coșinușii directori (α , β , γ).

Dacă direcția de propagare coincide cu una din axele principale, atunci doi dintre coșinușii directori sunt nuli, iar viteza de fază este egală cu viteza principală corespunzătoare.

Ecuația Fresnel fiind de ordinul al doilea în v , pentru fiecare direcție de propagare există două viteze distincte v' și v'' . Fiecărei viteze îi corespunde un ansamblu D_x , D_y și D_z , adică o orientare dată a vectorului \vec{D} , deci și un plan de polarizare. Deoarece

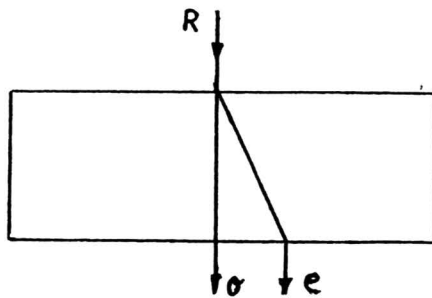


Figura 8.2:

sunt posibile ambele sensuri de propagare, pentru fiecare direcție de propagare există vitezele $\pm v'$ și $\pm v''$.

Există două direcții pentru care cele două viteze v' și v'' se confundă. Aceste direcții poartă numele de **axe optice** ale mediului anizotrop considerat. Ele sunt dispuse simetric în raport cu axe principale. Mediile în care există două axe optice se numesc medii **biaxe**.

În cazul în care simetria mediului este atât de înaltă încât două dintre constantele dielectrice sunt egale, cele două axe optice se confundă între ele și cu axa principală. Aceste medii se numesc **uniaxe**.

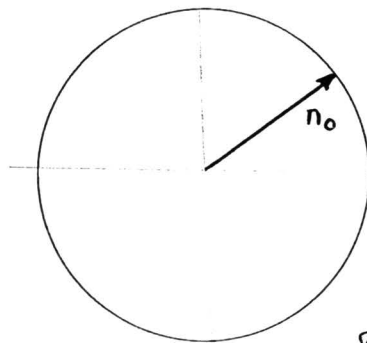
Utilizând relația de definiție a indicelui de refracție ($n = c/v$) ecuația Fresnel poate fi scrisă și cu ajutorul indicilor de refracție

$$\frac{n_x^2 \alpha^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{n_y^2 \beta^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{n_z^2 \gamma^2}{n^2 - n_z^2} = 0. \quad (8.21)$$

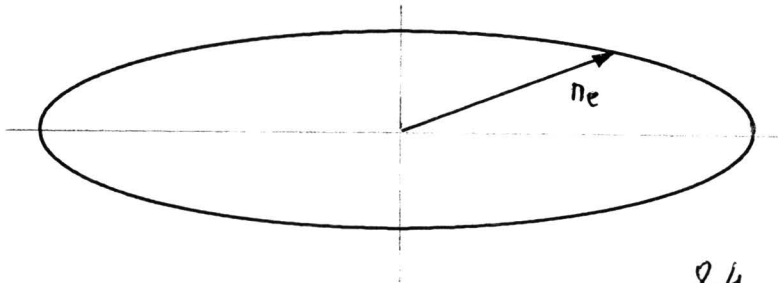
8.4 Refracția luminii în medii anizotrope

O rază de lumină ce pătrunde într-un mediu anizotrop se desparte în două raze, chiar și în cazul incidenței normale. Cele două raze refractate se propagă în două direcții diferite cu viteze diferite. Deci, raza incidentă este dublu refractată, iar fenomenul se numește **birefrință** sau dublă refracție.

Să considerăm incidența normală (vezi Fig. 8.2). Raza o ce trece nedeviată (respectă legea refracției) comportându-se ca într-un mediu izotrop se numește **raza ordinară**. Cealaltă rază e care este deviată chiar și în cazul incidenței normale, neținând seama de legea refracției, se numește **raza extraordinară**. Comportarea diferită a celor două raze arată că ele au indici de refracție diferiți (n_o respectiv n_e). Direcția după care raza incidentă nu mai este dublu refractată se numește **ax optic**. Pe această direcție indicele de refracție n_o al razei ordinare este egal cu indicele de



8.3



8.4

refracție n_e al razei extraordinare. Planul ce conține axul optic și normala poartă numele de **secțiune principală**.

Experimental s-a constatat că cele două raze emergente (raza ordinară și raza extraordinară) dintr-un cristal birefringent sunt total polarizate. În raza ordinară vectorul electric oscilează perpendicular pe planul secțiunii principale, în timp ce în raza extraordinară el oscilează în planul secțiunii principale.

Indicele de refracție al razei ordinare în cristalele uniace nu depinde de direcția din cristal. Într-o reprezentare polară se obține o sferă a cărei rază este egală cu valoarea indicelui de refracție n_o (vezi Fig. 8.3).

Indicele de refracție al razei extraordinare depinde de direcția din cristal. Într-o reprezentare polară se obține un elipsoid de rotație ce este tangent în două puncte cu sfera de rază n_o (vezi Fig. 8.4). Aceste două puncte sunt situate pe axul optic. Sunt posibile două cazuri, reprezentate în Fig. 8.5.

1. $n_o > n_e$ Elipsoidul este înscris în sferă.
2. $n_o < n_e$ Sfera este înscrisă în elipsoid.

Valoarea maximă a diferenței dintre cei doi indici de refracție măsurați pe o direcție

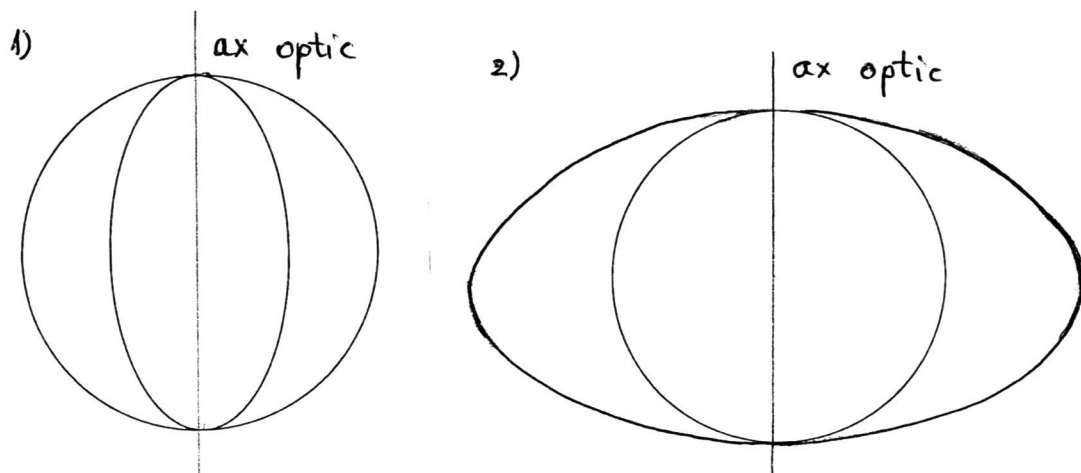


Figura 8.5:

perpendiculară pe axa optică poartă numele de **birefrință** cristalului

$$b = n_e - n_o . \quad (8.22)$$

În primul caz $n_o > n_e$ cristalele se numesc negative, iar în cel de-al doilea caz $n_o < n_e$ se numesc cristale pozitive.

8.5 Legea Malus

Fenomenul de birefrință poate fi folosit pentru obținerea luminii polarizate. Una din cele două stări de polarizare (cea a unei ordinare și cea a unei extraordinare) poate fi selectată prin:

1. suprimarea uneia din ele,
2. separarea celor două fascicule,
3. absorbția selectivă a uneia dintre ele (dicroism).

Dispozitivele cu ajutorul cărora se obține lumină polarizată se numesc **polarizori**, iar cele cu care se analizează starea de polarizare se numesc **analizori**. Același dispozitiv poate fi utilizat atât ca polarizor cât și ca analizor. Un astfel de dispozitiv este și filmul polaroid ce este constituit dintr-un material plastic transparent în care sunt înglobate cristale de iodosulfat de chinină, orientate în aceeași direcție. Acest mediu anizotrop uniax prezintă dicroism linear în tot domeniul vizibil. Filmul polaroid lasă să treacă numai raza extraordinară (polarizată paralel cu axa sa optică).

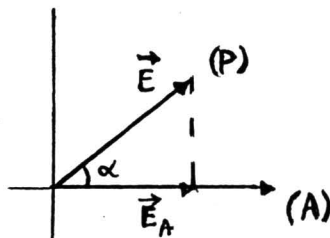


Figura 8.6:

Considerăm o radiație linear polarizată, obținută cu ajutorul unui polarizor cu axa optică (P), vezi Fig. 8.6. Această radiație cade pe un analizor ce are axa optică (A). El lasă să treacă doar lumina polarizată după direcția (A), având vectorul electric

$$E_A = E \cos \alpha .$$

Intensitatea undei, după analizor este

$$I_A = E_A^2 = E^2 \cos^2 \alpha = I_0 \cos^2 \alpha .$$

Expresia $I_A = I_0 \cos^2 \alpha$ poartă numele de legea Malus.

Dacă $\alpha = 0^\circ$, adică \vec{E}_A este paralel cu \vec{E} , atunci intensitatea luminii după analizor este maximă $I_A = I_0$.

Dacă $\alpha = 90^\circ$, adică \vec{E}_A este perpendicular pe \vec{E} , atunci intensitatea luminii după analizor este minimă $I_A = 0$ (**extincție**).

În concluzie intensitatea luminii transmise de un analizor este maximă sau nulă după cum radiația ce cade pe analizor este polarizată paralel, respectiv perpendicular în raport cu axa optică a analizorului.

Capitolul 9

Suprapunerea undelor electromagnetice

9.1 Suprapunerea a două unde electromagnetice de frecvențe diferite

Fie două unde plane de pulsații ω_1 și ω_2 , ce se propagă în direcția z într-un mediu omogen și izotrop. Considerăm de asemenea, cazul în care elongațiile câmpului electric al celor două unde plane sunt

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 e^{i(\omega_1 t - k_1 z_1)} , \quad (9.1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{i(\omega_2 t - k_2 z_2)} . \quad (9.2)$$

Fie P un punct din spațiu în care ajung cele două unde electrice \vec{E}_1 și \vec{E}_2 la un moment dat. Câmpul electric rezultat în punctul P va fi

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

Introducând notațiile

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} , \quad k = \frac{k_1 + k_2}{2} , \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} , \\ \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 , \quad \Delta k = k_1 - k_2 , \quad \Delta z = z_1 - z_2 ,$$

și folosind relația $2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$ putem scrie

$$\vec{E} = 2\vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz - \Delta k \cdot \Delta z/4)} \cos \frac{\Delta\omega \cdot t - z \cdot \Delta k - k \cdot \Delta z}{2} . \quad (9.3)$$

Ecuția (9.3) reprezintă o undă plană de frecvență ω ce se propagă în direcția z având amplitudinea variabilă

$$\vec{\mathcal{E}} = 2\vec{E}_0 \cos \frac{\Delta\omega \cdot t - z \cdot \Delta k - k \cdot \Delta z}{2} .$$

Intensitatea unei electromagnetice este o mărime proporțională cu densitatea w de energie ($w = \epsilon E^2$). Deci, intensitatea unei rezultante (9.3) este

$$I = \vec{E} \cdot \vec{E}^* = 4E_0^2 \cos^2 \frac{\Delta\omega \cdot t - z \cdot \Delta k - k \cdot \Delta z}{2} . \quad (9.4)$$

Ținând cont de relația $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$, expresia (9.4) devine

$$I = 2E_0^2 + 2E_0^2 \cos(\Delta\omega \cdot t - z \cdot \Delta k - k \cdot \Delta z) . \quad (9.5)$$

Primul termen în (9.5) se poate scrie $2E_0^2 = I_1 + I_2$, iar E_0^2 din al doilea ca $\sqrt{I_1 I_2}$. Deci ecuația (9.5) devine

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\omega \cdot t - z \cdot \Delta k - k \cdot \Delta z) . \quad (9.6)$$

Suprapunerea undelor electromagnetice prezintă interes când

1. defazajul $\Delta\phi = \Delta\omega \cdot t - z \cdot \Delta k - k \cdot \Delta z$ este datorat diferenței de drum Δz (**defazaj spațial**),
2. defazajul $\Delta\phi$ este datorat diferenței constante între frecvențele undelor ce se suprapun (**defazaj temporal**).

Să considerăm cazul al doilea pentru $\Delta z = 0$. Atunci defazajul devine $\Delta\phi = \Delta\omega \cdot t - z \cdot \Delta k$. Intensitatea unei rezultante este maximă dacă $\Delta\phi = 2m\pi$, m fiind un întreg, deci

$$\Delta\omega \cdot t - z \cdot \Delta k = 2m\pi . \quad (9.7)$$

Derivând în raport cu timpul relația (9.7) obținem

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} . \quad (9.8)$$

Relația (9.8) ne dă expresia vitezei de grup $v_g = dz/dt$, care reprezintă viteza de deplasare a maximului amplitudinii, deci și al densității de energie.

9.2 Interferența

Fenomenul de interferență constă în suprapunerea a două sau mai multe unde de aceeași lungime de undă λ .

Considerăm suprapunerea a două unde monocromatice a căror diferență de fază rămâne constantă în timp $\Delta\phi = ct$ (**unde coerente**). Elongațiile câmpului electric al celor două unde sunt

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_1 + \phi_{01})} , \quad (9.9)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_2 + \phi_{02})} , \quad (9.10)$$

unde \vec{r}_1 și \vec{r}_2 sunt distanțele de la sursele celor două unde la punctul P în care se produce interferența lor. Câmpul rezultat va fi

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = e^{i\omega t} \left[\vec{E}_{01} e^{i(\phi_{01} - \vec{k} \cdot \vec{r}_1)} + \vec{E}_{02} e^{i(\phi_{02} - \vec{k} \cdot \vec{r}_2)} \right].$$

Intensitatea undei rezultante este

$$I = \vec{E} \cdot \vec{E}^* = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \left[\vec{k} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \phi_{01} - \phi_{02} \right]. \quad (9.11)$$

Considerăm cazul particular în care cele două câmpuri sunt polarizate linear după aceeași direcție. Deci, putem scrie că

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\vec{r} \cdot \vec{k} + \Delta\phi). \quad (9.12)$$

Dacă cele două unde oscilează în fază ($\Delta\phi = 0$), intensitatea undei rezultante este maximă (**interferență constructivă**) dacă $\Delta\vec{r} \cdot \vec{k} = 2m\pi$, cu m un număr întreg. Ea este minimă (**interferență distructivă**) dacă $\Delta\vec{r} \cdot \vec{k} = (2m + 1)\pi$.

Dacă cele două unde oscilează în opoziție de fază ($\Delta\phi = \pi$), intensitatea undei rezultante este maximă dacă $\Delta\vec{r} \cdot \vec{k} = (2m + 1)\pi$ și minimă dacă $\Delta\vec{r} \cdot \vec{k} = 2m\pi$, cu m un număr întreg.

Când diferența de fază dintre cele două unde nu este constantă în timp, se evaluează o intensitate medie. În cazul undelor electromagnetice polarizate linear după aceeași direcție avem

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \gamma_{12}(t), \quad (9.13)$$

unde

$$\gamma_{12}(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\Delta\vec{r} \cdot \vec{k} + \Delta\phi) dt,$$

se numește **grad de coerență**. În acest caz interferența este nestaționară.

9.3 Interferența a două unde plane

Fie două unde plane monocromatice de pulsație ω ce se propagă în aceeași direcție, de exemplu, axa Oz a unui sistem de coordonate. Câmpul electric al celor două unde este descris de ecuațiile

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - kz_1 + \phi_{01})}, \quad (9.14)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{i(\omega t - kz_2 + \phi_{02})}. \quad (9.15)$$

Considerăm cazul în care diferența de fază a celor două unde rămâne constantă în timp.

Intensitatea unei rezultante este

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha \cos [k(z_2 - z_1) + \phi_{01} - \phi_{02}] , \quad (9.16)$$

unde $I_1 = E_{01}^2$, $I_2 = E_{02}^2$, $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = \sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha$ cu α unghiul dintre planele de oscilație ale celor două unde. Să considerăm două cazuri particulare

1. unde polarizate linear după aceeași direcție,
2. unde polarizate linear după direcții ortogonale.

În primul caz (al undelor polarizate linear după aceeași direcție) $\alpha = 0^\circ$. Deci,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta z + \Delta\phi) .$$

Dacă cele două unde oscilează în fază ($\Delta\phi = 0$) interferența este constructivă pentru $k \cdot \Delta z = 2m\pi$, este distructivă pentru $k \cdot \Delta z = (2m + 1)\pi$ și nu are loc pentru $k \cdot \Delta z = (2m + 1)\pi/2$, unde m este un număr întreg.

Dacă cele două unde care interferă oscilează în opoziție de fază ($\Delta\phi = \pi$) intensitatea unei rezultante

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta z) ,$$

este maximă pentru $k \cdot \Delta z = (2m + 1)\pi$, este minimă pentru $k \cdot \Delta z = 2m\pi$ și este constantă pentru $k \cdot \Delta z = (2m + 1)\pi/2$ (interferența nu se produce) cu m un număr întreg.

Dacă cele două unde oscilează în cvadratură ($\Delta\phi = \pi/2$) intensitatea unei rezultante

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \sin(k\Delta z) ,$$

este maximă pentru $k \cdot \Delta z = (4m + 1)\pi/2$, este minimă pentru $k \cdot \Delta z = (4m - 1)\pi/2$ și este constantă pentru $k \cdot \Delta z = m\pi$ cu m un număr întreg.

În cel de-al doilea caz, când cele două unde care interferă sunt polarizate linear după direcții perpendiculare, interferența nu are loc deoarece $\alpha = \pi/2$ ($\cos \pi/2 = 0$).

9.4 Interferența luminii

Pentru obținerea a două sau mai multe unde ^{luminoase} coerente se separă spațial, printr-un procedeu oarecare, dintr-un fascicul de lumină monocromatică două sau mai multe fascicule care ulterior se vor suprapune. Experimental se utilizează două metode pentru obținerea undelor coerente:

1. divizarea frontului de undă al unei ce provine de la o sursă primară,

2. divizarea amplitudinii undei primare.

Divizarea frontului de undă se poate realiza cu dispozitivul Young, oglinda Lloyd, oglinzile Fresnel, bilentilele Billet sau biprisma Fresnel. Divizarea amplitudinii undei primare se poate realiza cu lama cu fețe plan paralele, pana optică, etc. La interferența luminii se obțin o serie de benzi luminoase și întunecate ce alternează, numite **franje** ce reprezintă maxime și respectiv minime de interferență.

9.4.1 Dispozitivul Young

Fantele S_1 și S_2 (vezi Fig. 9.1) reprezintă două surse secundare. Ele aparțin aceluiași front de undă, deci sunt coerente. Undele provenind de la cele două surse secundare interferă, rezultând pe ecranul E situat la distanța D , o figură de interferență (o alternare de franje luminoase și întunecate). Franjele sunt rectilinii și paralele între ele. Deoarece franjele se obțin pentru diferite poziții ale ecranului, aceste franje sunt nelocalizate.

Conform Fig. 9.1 avem

$$\sin \alpha = \frac{\delta}{d}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{D}.$$

Deoarece $D \gg d$ rezultă că $\sin \alpha \simeq \operatorname{tg} \alpha$, deci diferența de drum δ între cele două unde secundare este

$$\delta = x \frac{d}{D}, \quad (9.17)$$

unde d este distanța dintre cele două fante ale dispozitivului. Dacă lumina se propagă într-un mediu transparent de indice de refracție n , atunci **drumul optic** este dat de produsul dintre indice de refracție al mediului și **drumul geometric**. În punctul M se obține un maxim de interferență când diferența de drum este egală cu un număr par de semilungimi de undă, deci

$$x_m = m \frac{\lambda D}{d}. \quad (9.18)$$

În punctul O este situat maximul central. Distanța dintre două maxime sau două minime, consecutive se numește **interfranjă** și se notează cu i :

$$i = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda D}{d}. \quad (9.19)$$

Conform relației (9.19), interfranja este o constantă (nu depinde de m). Rezultă că franjele sunt echidistante pe ecranul E . Relația (9.19) poate servi la determinarea lungimii de undă.

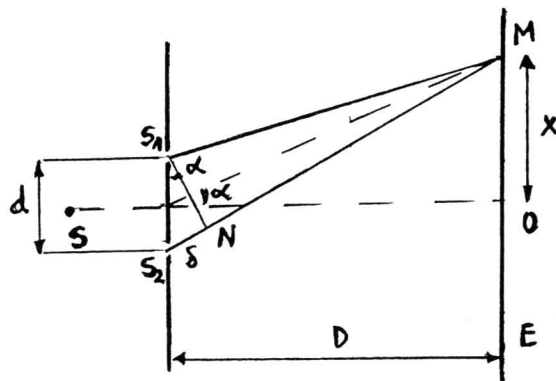


Figura 9.1:

Dacă în fața uneia din fante (de exemplu S_1) se introduce o lamă cu fețe plan paralele construită dintr-un material transparent de indice de refracție n , diferența de drum optic este

$$\Delta = S_2M - (S_1M - e + ne) = \delta - (n - 1)e ,$$

unde $\delta = S_2M - S_1M$ este diferența de drum optic înainte de introducerea lamei. Maximul central corespunde condiției $\Delta = 0$, de unde poziția maximului central (față de punctul O) este

$$x_0 = e(n - 1) \frac{D}{d} .$$

Deci, sistemul de franje se deplasează în sensul fantei acoperite de lamă.

9.4.2 Lama cu fețe plan paralele

Fie d grosimea lamei (vezi Fig. 9.2) și n indicele de refracție al materialului transparent din care este construită lama. Din Fig. 9.2 avem

$$AC = 2d \operatorname{tg} r , \quad AD = 2d \operatorname{tg} r \sin i , \quad AB = \frac{d}{\cos r} .$$

Ca și în cazul reflexiei undelor mecanice pe un mediu mai dens, unda incidentă și unda reflectată sunt în opoziție de fază, între ele apărând o diferență de drum egală cu $\lambda/2$. Ținând cont de legea refracției $\sin i = n \sin r$ diferența de drum optic

$$\delta = n(AB + BC) - (AD - \lambda/2) ,$$

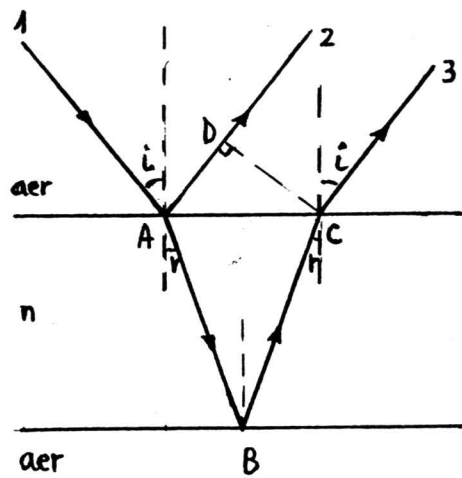


Figura 9.2:

are expresia $\delta = 2nd \cos r + \lambda/2$. In cazul incidenței normale ($i = 0$ și $r = 0$) diferența de drum optic devine

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}. \quad (9.20)$$

Cele două raze paralele 2 și 3 sunt coerente deoarece provin de la aceeași sursă primară. Dacă sunt strânse cu o lentilă convergentă ele vor interfera. Franjele obținute prin interferența razelor paralele sunt localizate la infinit.

9.5 Aplicații

9.1. Se consideră un dispozitiv Young. In fața fantei S_1 se așează o lamă de sticlă ($n = 1,5$) cu grosimea $e = 0,01$ mm (vezi Fig. 9.3). Găsiți noua poziție a maximului central dacă $d = 40$ cm și $D = 2,5$ m.

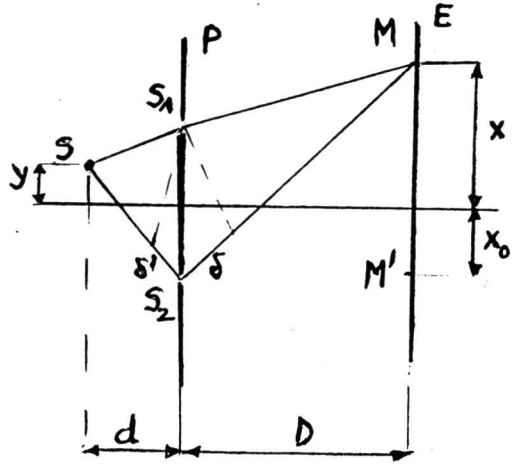
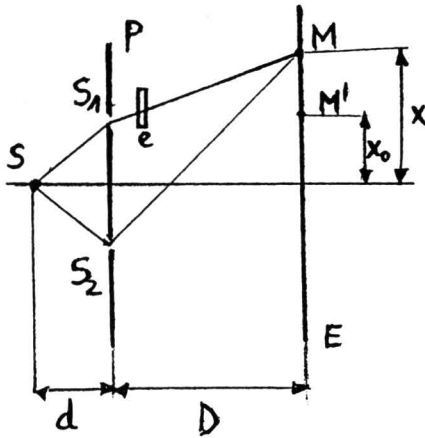
R: Introducerea lamei de sticlă în dreptul fantei S_1 duce la o creștere cu $(n - 1)e$ a drumului optic parcurs de raza S_1M . Diferența de drum dintre razele de lumină care interferează pe ecran în punctul M va fi

$$\Delta = S_2M - [S_1M + e(n - 1)] = \delta - e(n - 1),$$

unde

$$\delta = S_2M - S_1M = \frac{ax}{D}.$$

9,3



Deci

$$\Delta = \frac{ax}{D} - e(n-1). \quad (9.21)$$

Maximul central se obține pe ecran în punctul M' corespunzător lui $\Delta = 0$, prin urmare

$$x_0 = \frac{De(n-1)}{a}. \quad (9.22)$$

În urma înlocuirilor numerice se obține $x_0 = 7,7 \text{ mm}$. *Întregul sistem de franje se deplasează cu x_0 în sensul fantei acoperite de lamă.*

9.2. Se consideră un dispozitiv Young. Se deplasează sursa S pe o direcție paralelă cu ecranul, în sus cu $y = 1 \text{ cm}$ (vezi Fig. 9.4). Calculați deplasarea maximului central pentru $d = 20 \text{ cm}$ și $D = 1 \text{ m}$.

R: Deplasarea sursei S introduce o diferență de drum și înaintea paravanului P . Diferența de drum între undele ce interferă pe ecran în punctul M va fi

$$\Delta = (SS_2 + S_2M) - (SS_1 + S_1M) = SS_2 - SS_1 + S_2M - S_1M = \frac{ay}{d} + \frac{ax}{D}.$$

Maximul central se obține pe ecran în punctul M' corespunzător lui $\Delta = 0$, prin urmare

$$\frac{ax_0}{D} = -\frac{ay}{d},$$

de unde

$$x_0 = -\frac{Dy}{d}. \quad (9.23)$$

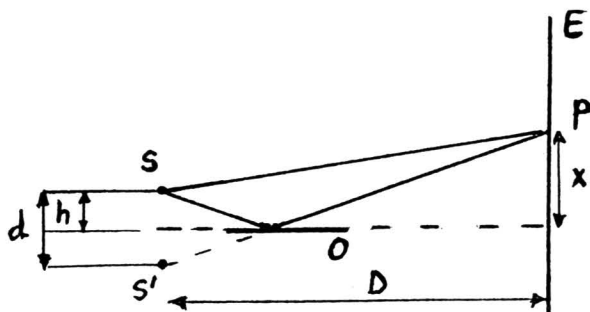


Figura 9.5:

În urma înlocuirilor numerice se obține $x_0 = -5$ cm. *Întregul sistem de franje se deplasează cu x_0 în sens contrar sensului de deplasare al sursei S .*

9.3. Fantele unui dispozitiv Young, distanțate cu $d = 1$ mm sunt iluminate cu un fascicul de lumină bicromatică, de lungimi de undă $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ și λ' . Să se determine lungimea de undă λ' ce produce o neclaritate în figura de interferență a radiației de lungime de undă λ între maximele de ordine 9 și 10.

R: Neclaritatea în figura de interferență a radiației de lungime de undă λ între maximele de ordine 9 și 10, se produce când maximul de ordin 9 al radiației de lungime de undă λ' coincide cu minimul de ordin 9 al radiației de lungime de undă λ

$$\frac{D}{d}m\lambda' = \frac{D}{d}(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (9.24)$$

unde $m = 9$. Prin urmare

$$\lambda' = \frac{(2m+1)\lambda}{2m}.$$

În urma înlocuirilor numerice se obține $\lambda' = 0,528 \mu\text{m}$.

9.4. Într-o experiență de interferență cu ajutorul oglinzilor Lloyd o undă luminoasă provenind direct de la sursa S interferează cu unda reflectată de oglinda O . Franjele de interferență sunt observate pe ecranul E aflat la distanța $D = 1$ m de sursă. Interfranja are valoarea $i = 0,25$ mm pentru o anumită poziție a sursei. Dacă sursa S este îndepărtată de planul oglinzii cu $\Delta h = 0,6$ mm interfranja se micșorează cu $\eta = 1,5$ ori. Determinați lungimea de undă a radiației luminoase.

R: Fie S' imaginea virtuală a sursei S dată de oglinda O (vezi Fig. 9.5). S și S' pot fi considerate surse coerente care dau imaginea de interferență pe ecranul E .

Deoarece reflexia unei luminoase pe oglindă se face cu pierdere de $\lambda/2$, diferența de drum dintre razele ce interferă în punctul P va fi

$$\Delta = S'P - SP - \frac{\lambda}{2} = \delta - \frac{\lambda}{2},$$

unde $\delta = \frac{ax}{D} = \frac{2hx}{D}$. De unde

$$\Delta = \frac{2hx}{D} - \frac{\lambda}{2}.$$

Interfranța va avea valoarea

$$i = \frac{D\lambda}{2h}.$$

După îndepărtarea sursei valoarea interfranței devine

$$i' = \frac{D\lambda}{2(h + \Delta h)} = \frac{i}{\eta}.$$

Deci

$$\lambda = \frac{2i \Delta h}{D(\eta - 1)}.$$

În urma înlocuirilor numerice se obține $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$.

9.5. Determinați grosimea minimă a unei pelicule cu indicele de refracție 1,33 astfel încât radiația cu $\lambda_1 = 0,64 \mu\text{m}$ să prezinte un maxim de interferență în urma reflexiei, iar radiația cu $\lambda_2 = 0,4 \mu\text{m}$ să prezinte un minim de interferență. Unghiul de incidență este $i = 30^\circ$.

R: Diferența de drum între radiațiile care interferă este

$$\delta = 2nd \cos r + \frac{\lambda}{2}.$$

Dar $\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = (1/n)\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$, deci

$$\delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}.$$

Din condiția de maxim $\delta = 2K\lambda/2$ obținem

$$d = \frac{\lambda_1}{4} \frac{2K - 1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}. \quad (9.25)$$

Din condiția de minim $\delta = (2K + 1)\lambda/2$ obținem

$$d = \frac{\lambda_2}{4} \frac{2K}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}. \quad (9.26)$$

În relațiile (9.25) și (9.26) numărul întreg K ia valorile 1, 2, 3... Dând valori lui K obținem

MAX $d = 0,1298 \mu\text{m}; 0,3894 \mu\text{m}; 0,649 \mu\text{m} \dots$

MIN $d = 0,1622 \mu\text{m}; 0,3244 \mu\text{m}; 0,4866 \mu\text{m}; 0,649 \mu\text{m} \dots$

Deci grosimea minimă a peliculei va fi $d = 0,649 \mu\text{m}$.

Capitolul 10

Difracția luminii

Difracția luminii constă în devierea de la direcția de propagare atunci când lumina întâlnește un obstacol sau fante (una sau mai multe) de dimensiuni de același ordin de mărime cu lungimea de undă a radiației luminoase. Acest fenomen este pus în evidență pentru toată gama radiațiilor electromagnetice și pentru obstacole sau fante de forme diferite.

Explicarea acestui fenomen se face cu ajutorul principiului Huygens-Fresnel, potrivit căruia **perturbația produsă de o sursă de lumină S , într-un punct de observație P , aflat în exteriorul unei suprafețe Σ ce conține sursa S , este rezultatul suprapunerii în P a contribuțiilor datorate unei distribuții continue de surse secundare, coerente și punctiforme, distribuite pe suprafața Σ** . Dacă suprafața Σ coincide cu o suprafață de undă, atunci undele secundare vor avea aceeași fază inițială.

În continuare ne vom referi la difracția pe fante (orificii, deschideri). După poziția relativă a sursei și a paravanului (pe care se observă figura de difracție) față de fantă, fenomenul de difracție poate fi clasificat astfel:

1. difracția Fraunhofer, când atât sursa cât și punctul de observație sunt la distanțe foarte mari de orificiul ce produce fenomenul,
2. difracția Fresnel, când fie sursa, fie punctul de observație, fie ambele sunt la distanțe finite de orificiul ce produce fenomenul.

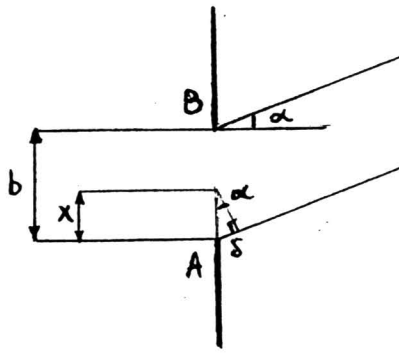


Figura 10.1:

10.1 Difrakția Fraunhofer

10.1.1 Difrakția pe o fantă

Considerăm o fantă dreptunghiulară de lățime b și lungime l ($l \gg b$) pe care cade normal un fascicul paralel, de lumină monocromatică de pulsație ω . Conform principiului Huygens-Fresnel suprafața fantei poate fi reprezentată printr-o distribuție continuă de surse secundare. Undele emise de aceste surse secundare interferă în zona aflată în spatele fantei, producând astfel fenomenul de difracție.

Fie α unghiul sub care se difractă lumina pe fantă. Considerăm un element infinitesimal dx situat la distanța x de capătul A al fantei (vezi Fig. 10.1). Undele emise de această sursă secundară sunt defazate față de cele emise de sursa secundară plasată în A cu

$$\Delta\phi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(x) = kx \sin \alpha. \quad (10.1)$$

Amplitudinea acestor unde are valoarea $(E_0/b) dx$. Deci, elongația câmpului electric al undelor emise de această sursă elementară este

$$dE(\alpha, x) = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \alpha)} dx. \quad (10.2)$$

Unda difractată se obține prin integrarea tuturor contribuțiilor surselor secundare

$$E(\alpha) = \frac{E_0}{b} \int_0^b e^{i(\omega t - kx \sin \alpha)} dx = \frac{E_0 \sin \left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}} e^{i(\omega t - \frac{kb}{2} \sin \alpha)}. \quad (10.3)$$

Intensitatea unei difractate are expresia

$$I(\alpha) = E(\alpha) E^*(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)^2}, \quad (10.4)$$

unde $I_0 = E_0 E_0^*$.

Modul cum poate fi distribuită intensitatea luminii în figura de difracție, în funcție de unghiul α , se obține din analiza funcției $I(\alpha)$. Extremele acestei funcții sunt date de condiția $dI/d\alpha = 0$. Această condiție este echivalentă cu ecuația

$$\cos \alpha \cdot \sin \left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right) \left[\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right) \right] = 0 .$$

Poziția minimelor de difracție $I(\alpha) = 0$ este dată de

$$\sin \left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right) = 0 , \quad (10.5)$$

de unde

$$b \sin \alpha = n\lambda , \quad (10.6)$$

cu n un număr întreg. Unghiul pentru care se obține primul minim de difracție este

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{\lambda}{b} \simeq \frac{\lambda}{b} . \quad (10.7)$$

Deci, lărgimea unghiulară a maximului central este

$$2\alpha_1 = 2 \frac{\lambda}{b} .$$

Unghiul sub care se vede minimul n este

$$\alpha_n = \arcsin \frac{n\lambda}{b} \simeq n \frac{\lambda}{b} . \quad (10.8)$$

Astfel, lărgimea maximului secundar cuprins între minimele de ordin n și $n + 1$ are expresia

$$\Delta_{n,n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n \simeq \frac{\lambda}{b} = \Delta . \quad (10.9)$$

Valoarea maximului central (valoarea funcției $I(\alpha)$ în origine) este

$$I(0) = I_0 \lim_{\sin \alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)^2} = I_0 . \quad (10.10)$$

Maximele secundare se obțin pentru acele valori ale lui $\sin \alpha$ pentru care

$$\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} = \frac{(2n + 1)\pi}{2} .$$

Valoarea primului maxim ($\sin \alpha = 3\lambda/(2b)$) este

$$I_1 \simeq \frac{2I_0}{45},$$

iar a celui de al doilea maxim ($\sin \alpha = 5\lambda/(2b)$)

$$I_2 \simeq \frac{2I_0}{125}.$$

Se constată că valorile maximelor secundare scad rapid față de cea a maximului central.

Dependența intensității relative (I/I_0) a unei difractate, de $\sin \alpha$ este ilustrată grafic în Fig. 10.2 pentru $b = 20 \mu\text{m}$ și $\lambda = 500 \text{ nm}$ (din spectrul vizibil). Se observă că maximele secundare scad rapid.

Dependența de α a intensității relative este reprezentată în figura 10.3, pentru aceleași valori ale lui b și λ din Fig. 10.2. Cele două grafice 10. 2 și 10. 3 au aceeași formă deoarece unghiul α ia valori mici. Pentru aceste valori $\sin \alpha \simeq \alpha$ (α în radiani).

Efectul lățimii fantei asupra dependenței de α a intensității relative este ilustrat în figura 10.4. Am ales $\lambda = 500 \text{ nm}$ și trei valori pentru b : $100 \mu\text{m}$ pentru linia continuă, $50 \mu\text{m}$ pentru linia întreruptă și $10 \mu\text{m}$ pentru linia cu punct. Se constată că lărgimea maximului central se îngustează cu creșterea lui b .

Influența lungimii de undă λ a radiației luminoase folosite asupra dependenței de α a intensității relative este redată de figura 10.5. Am ales $b = 20 \mu\text{m}$ și patru valori pentru λ : $1 \mu\text{m}$ (infraroșu) pentru linia continuă, $0,77 \mu\text{m}$ (limita superioară a spectrului vizibil) pentru linia întreruptă cu segmente scurte, $0,4 \mu\text{m}$ (limita inferioară a spectrului vizibil) pentru linia întreruptă cu segmente lungi și $0,1 \mu\text{m}$ pentru linia cu punct. Se constată că lărgimea maximului central se îngustează când λ scade și întreaga figură se strânge spre zero.

10.1.2 Rețeaua de difracție unidimensională plană

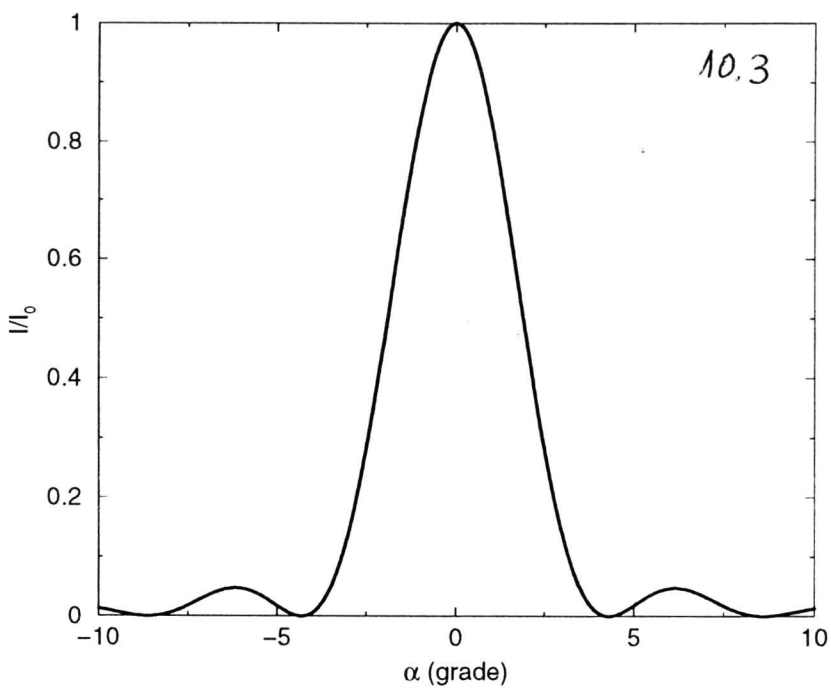
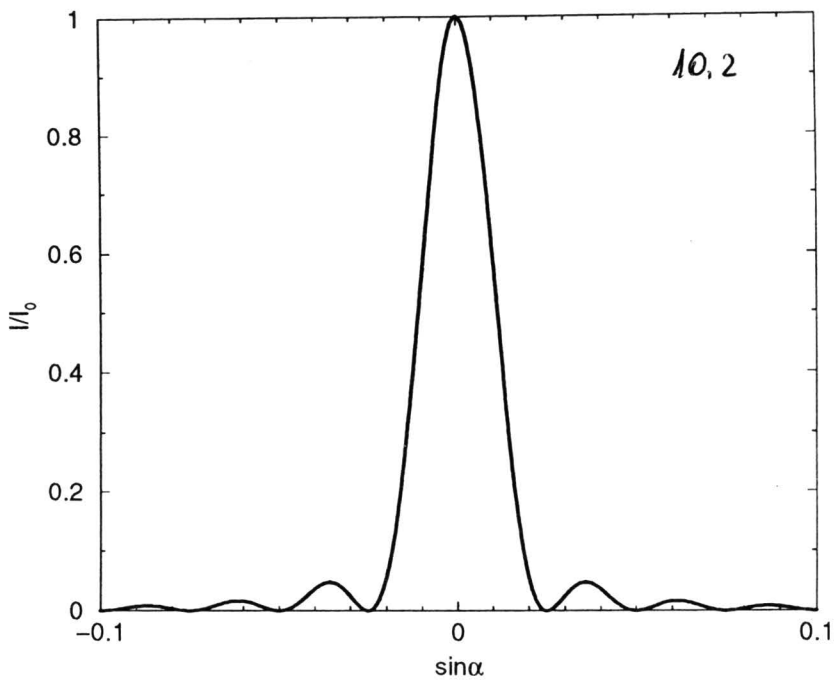
O rețea de difracție unidimensională plană este un ansamblu de fante paralele, egal distanțate și coplanare. Distanța dintre două fante consecutive se numește constanta rețelei de difracție.

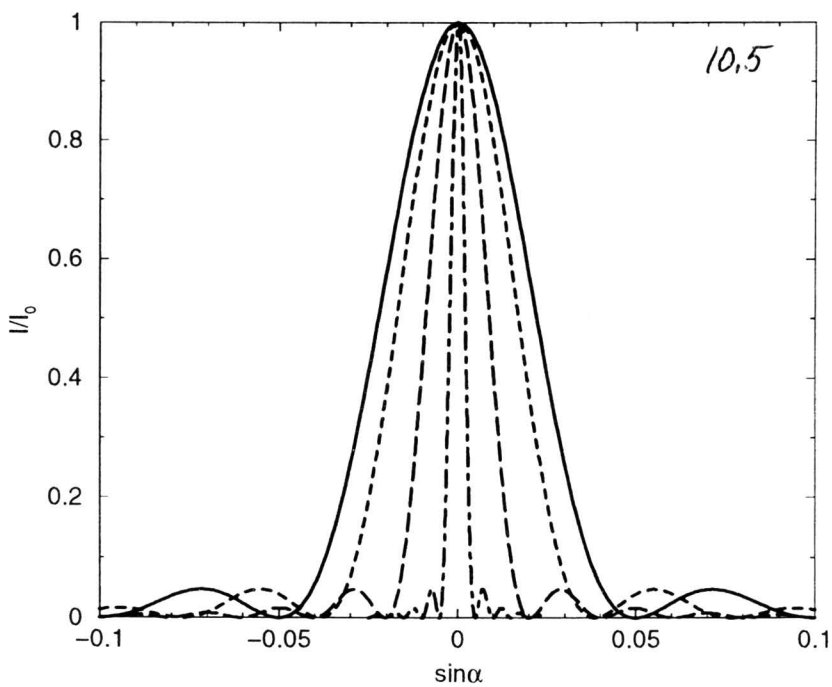
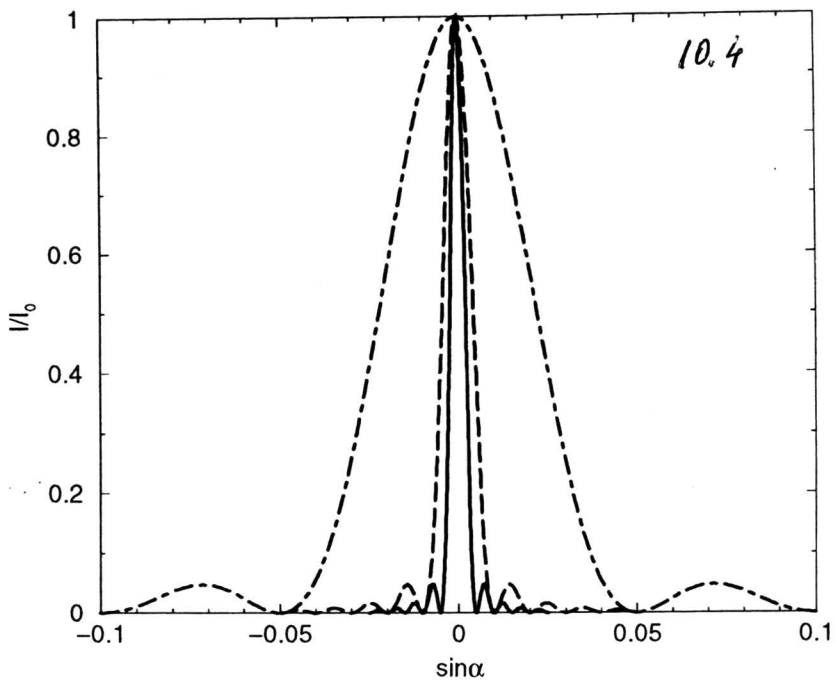
Notând cu b lățimea fantei, iar cu d lățimea zonei opace (distanța dintre fante), constanta rețelei de difracție a este

$$a = b + d. \quad (10.11)$$

Dacă pe distanța L sunt N fante, atunci

$$a = \frac{L}{N}.$$





Fenomenul de difracție pe o rețea de difracție unidimensională plană constă în suprapunerea undelor (rezultate din difracția pe o fantă) provenite de la toate fantele rețelei de difracție. Deci, difracția luminii pe o rețea de difracție unidimensională plană este rezultatul a două fenomene:

1. difracția luminii pe o fantă,
2. interferența multiplă a undelor rezultate de la toate fantele rețelei de difracție.

Diferența de drum între undele provenite de la două fante consecutive este

$$\Delta r = a \sin \alpha .$$

Cu notațiile

$$A = E_0 \frac{\sin \left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}} , \quad r_1 = \frac{b}{2} \sin \alpha , \quad (10.12)$$

intensitatea câmpului electric resultant are expresia

$$E = A e^{i(\omega t - k r_1)} + A e^{i(\omega t - k r_1 - k \cdot \Delta r)} + A e^{i(\omega t - k r_1 - 2k \cdot \Delta r)} + \dots + A e^{i[\omega t - k r_1 - k(N-1) \cdot \Delta r]} . \quad (10.13)$$

Membrul drept al ecuației (10.13) reprezintă o progresie geometrică de rație

$$e^{-ik \cdot \Delta r} .$$

Folosind formula progresiei geometrice obținem

$$E = E_0 \frac{\sin \left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}} \frac{\sin \left(\frac{\pi N a \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\sin \left(\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda} \right)} e^{i[\omega t - \frac{k}{2} N a \sin \alpha - \frac{k}{2} (a+b) \sin \alpha]} . \quad (10.14)$$

Deci, intensitatea unei difractate de rețeaua plană cu N fante este

$$I = I_0 \frac{\sin^2 N \beta_1}{\sin^2 \beta_1} \frac{\sin^2 \beta_2}{\beta_2^2} , \quad (10.15)$$

unde

$$\beta_1 = \frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda} , \quad \beta_2 = \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} .$$

Funcția $f_1(\beta_1) = \sin^2 N \beta_1 / \sin^2 \beta_1$ descrie variația intensității în punctul de observație ca urmare a interferenței multiple, iar funcția $f_2(\beta_2) = \sin^2 \beta_2 / \beta_2^2$ exprimă efectul difracției produsă de o singură fantă.

Funcția f_1 are o variație rapidă cu unghiul α . Prima sa derivată se anulează când

$$\sin(N\beta_1)[N \operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}(N\beta_1)] = 0.$$

Condiția $\sin N\beta_1 = 0$ devine

$$a \sin \alpha = \frac{m}{N} \lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10.16)$$

Dacă raportul m/N este un număr întreg n se obțin maxime principale de interferență multiplă. Într-adevăr

$$\lim_{\beta_1 \rightarrow n\pi} f_1(\beta_1) = N \lim_{\beta_1 \rightarrow n\pi} \frac{\sin N\beta_1}{\sin \beta_1} = N^2.$$

Deci, **condiția de obținere a maximelor principale** este

$$a \sin \alpha = n \lambda, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10.17)$$

unde n este ordinul maximului.

Soluțiile ecuației $N \operatorname{tg}\beta_1 = \operatorname{tg}(N\beta_1)$ ne dau pozițiile unghiulare ale maximelor secundare de interferență multiplă, a căror intensitate este mult mai mică decât a maximelor principale.

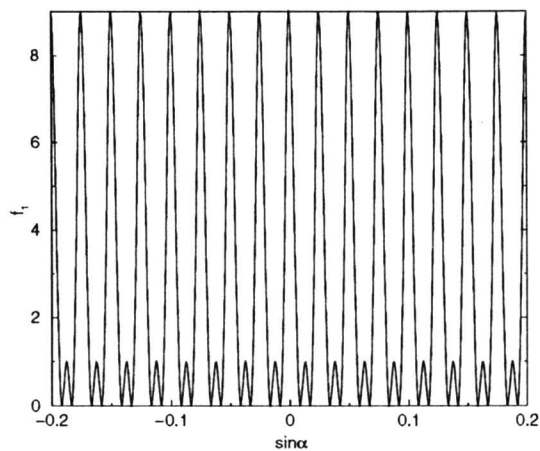
Cealaltă funcție $f_2(\beta_2)$ are o variație lentă în raport cu unghiul α . Ea se anulează când $\beta_2 = p\pi$ sau

$$b \sin \alpha = p \lambda, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (10.18)$$

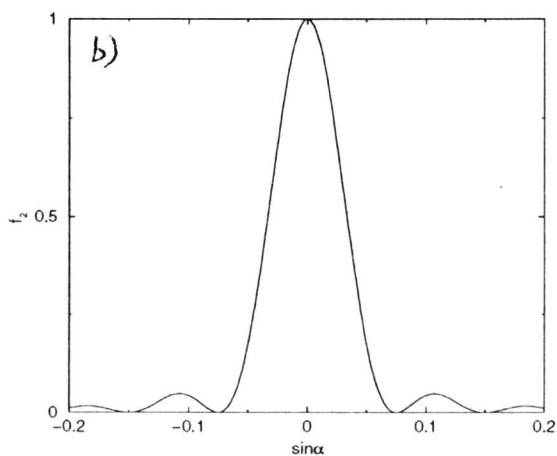
Funcția $f_2(\beta_2)$ modulează intensitatea luminii rezultate din interferența multiplă. Deoarece intensitatea maximelor de difracție printr-o fantă scade rapid cu creșterea lui p , figura de difracție constă din maximele principale de interferență multiplă (date de (10.17)) conținute în maximul central de difracție cuprins între $-\lambda/b$ și λ/b .

Reprezentarea grafică a funcțiilor $f_1(\sin \alpha)$, $f_2(\sin \alpha)$ și a produsului lor este înfățișată în figurile 10.6(a), 10.6(b) și respectiv, 10.6(c) pentru $a = 20\mu\text{m}$, $b = a/3$, $N = 3$ și $\lambda = 500 \text{ nm}$. Se observă că, funcția $f_1(\sin \alpha)$ variază rapid cu $\sin \alpha$, în timp ce $f_2(\sin \alpha)$ variază lent.

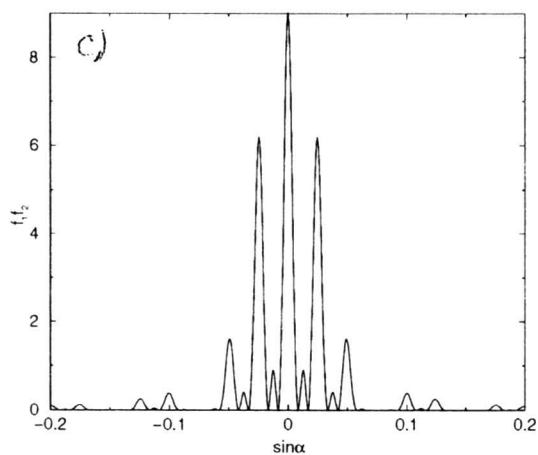
Variația intensității relative I/I_0 în funcție de $\sin \alpha$ (dată de ecuația (10.15)) este reprezentată în Fig. 10.7 pentru $a = 20 \mu\text{m}$, $b = a/3$ și $\lambda = 500 \text{ nm}$. Numărul de fante este $N = 5$ în Fig. 10.7(a) și $N = 10$ în Fig. 10.7(b). Linia continuă reprezintă funcția $I/I_0(\sin \alpha)$ (dată de (10.15)), iar linia întreruptă funcția $N^2 f_2(\beta_2)$ ce corespunde difracției pe o fantă și care înfășoară funcția reprezentată. În figurile următoare semnificația celor două linii se păstrează. În Fig. 10.7 se constată că lărgimea maximului principal de difracție și numărul de maxime principale de



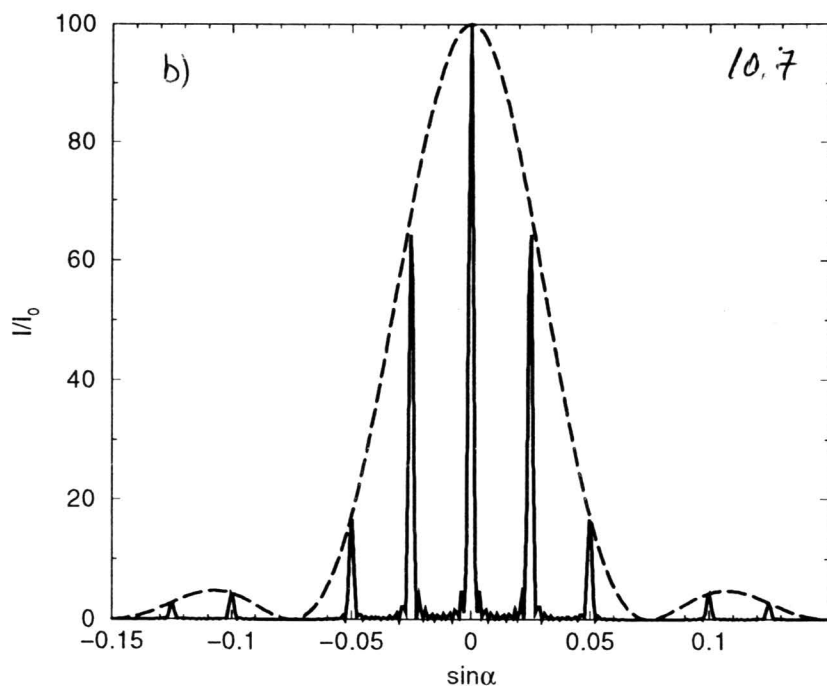
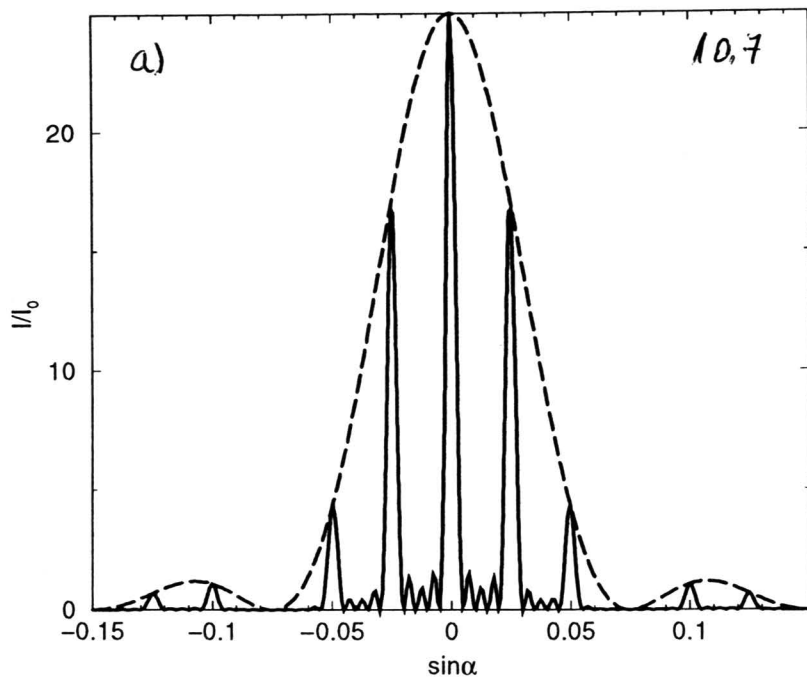
10.6(a)

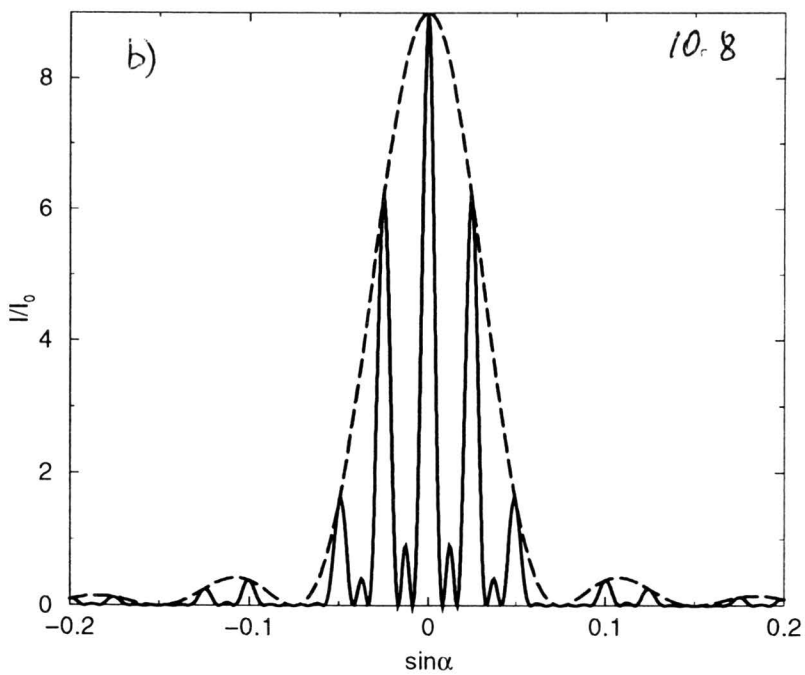
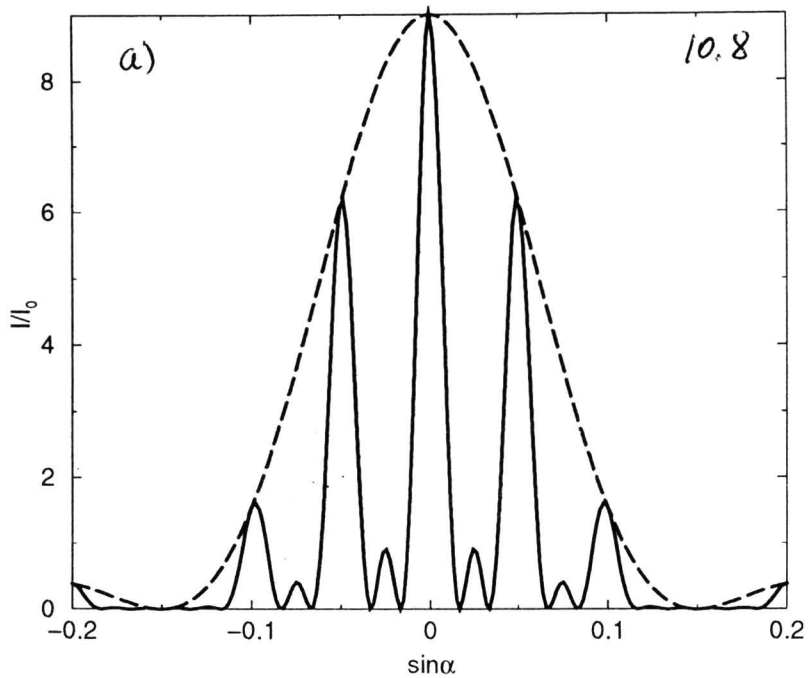


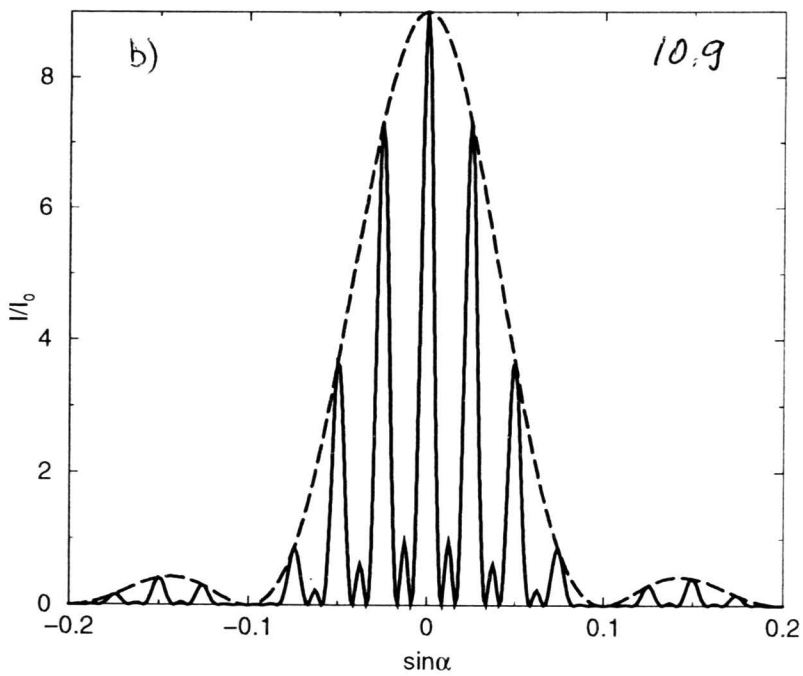
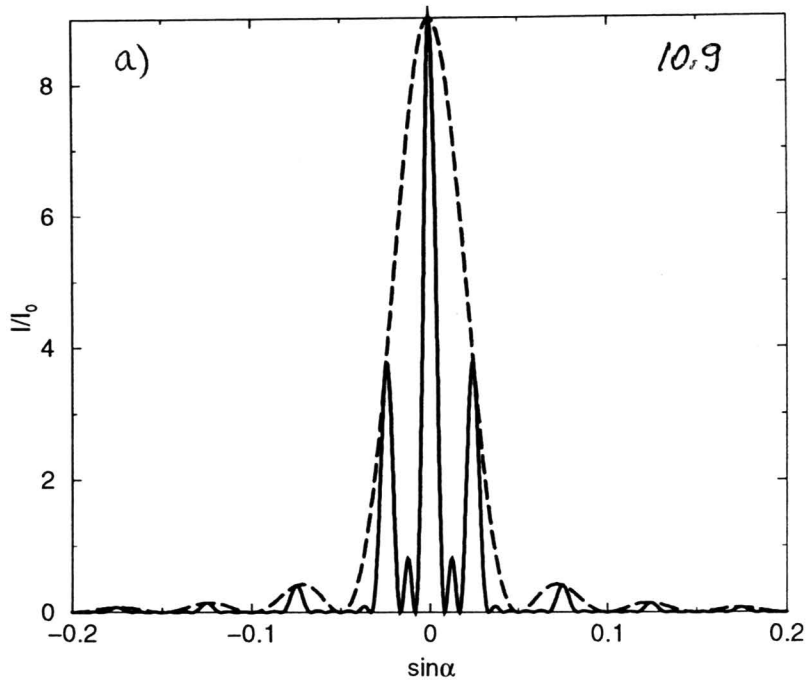
10.6(b)



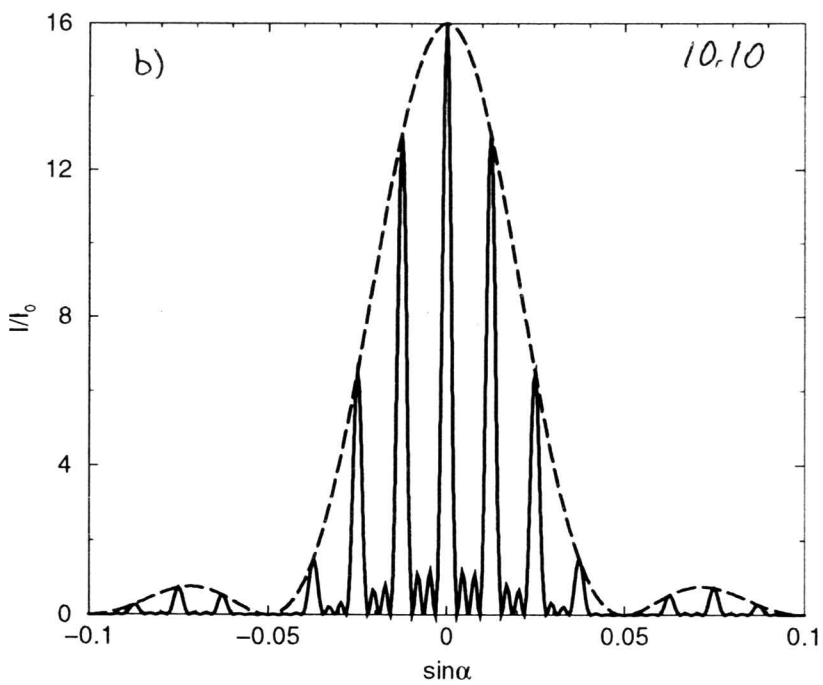
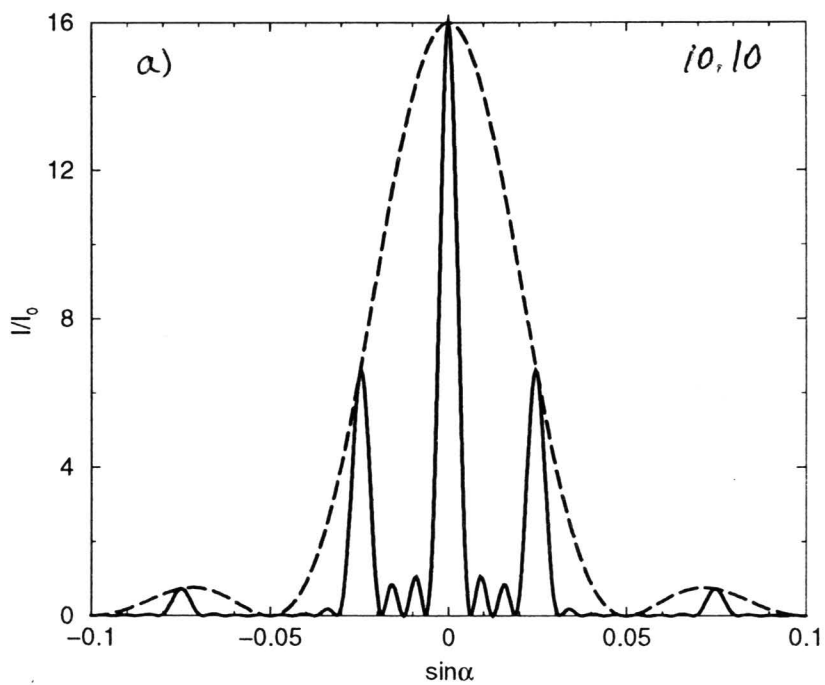
10.6(c)







173



174

interferență multiplă nu se modifică cu N . În schimb numărul și mărimea maximelor secundare de interferență multiplă depind puternic de N . De asemenea, remarcăm că lărgimea maximelor principale de interferență multiplă se îngustează cu creșterea lui N .

Influența lungimii de undă (λ) asupra dependenței de $\sin \alpha$ a intensității relative I/I_0 este redată de figura 10.8. Am ales $a = 20 \mu\text{m}$, $b = a/3$, $N = 3$ și două valori pentru λ : $1 \mu\text{m}$ (infraroșu) pentru Fig. 10.8(a) și $0,5 \mu\text{m}$ (spectrul vizibil) pentru Fig. 10.8(b). Se observă că lărgimea maximului central se îngustează când λ scade și întreaga figură se strânge spre zero.

Efectul lățimii (b) fantelor asupra dependenței de $\sin \alpha$ a intensității relative I/I_0 este ilustrat în figura 10.9. Am ales $\lambda = 500 \text{ nm}$, $a = 20 \mu\text{m}$, $N = 3$ și două valori pentru b : $a/2$ pentru Fig. 10.9(a) și $a/3$ pentru Fig. 10.9(b). Se constată că lărgimea maximului central se îngustează cu creșterea lui b . De asemenea, observăm că numărul maximelor principale de interferență multiplă crește cu micșorarea lui b .

Influența lățimii zonei opace asupra dependenței de $\sin \alpha$ a intensității relative I/I_0 este redată în figura 10.10. Am ales $\lambda = 500 \text{ nm}$, $b = 10 \mu\text{m}$, $N = 4$ și două valori pentru a : $20 \mu\text{m}$ pentru Fig. 10.10(a) și $40 \mu\text{m}$ pentru Fig. 10.10(b). Observăm că numărul maximelor principale de interferență multiplă este puternic influențat de valoarea lui d (el crește când d se mărește). Lățimea zonei opace nu modifică lărgimea maximului central de difracție.

10.1.3 Dispozitivul Young

Dispozitivul Young poate fi considerat ca o rețea plană de difracție cu două fante. Astfel, figura de interferență care se obține cu ajutorul unui dispozitiv Young este rezultatul a două procese:

1. difracția pe o fantă,
2. interferența fasciculelor provenite de la cele două fante.

Fenomenul de difracție determină scăderea intensității luminii în figura de interferență de la centrul figurii spre margine, până la anularea ei. Franjele de interferență care se observă experimental reprezintă maximele principale de interferență cuprinse în maximul central de difracție.

Particularizând relația (10.15) obținem pentru intensitatea unei rezultante expresia

$$I(\alpha) = 4I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)^2} \cos^2 \left[\frac{\pi (d + b) \sin \alpha}{\lambda} \right], \quad (10.19)$$

unde b reprezintă lărgimea unei fante, iar d distanța dintre fante.

Maximele de interferență sunt date de condiția

$$(d + b) \sin \alpha = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10.20)$$

Minimele de difracție se obțin când

$$b \sin \alpha = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (10.21)$$

Maximul de ordin n se suprapune peste primul minim de difracție când

$$\sin \alpha = \frac{n\lambda}{d + b} = \frac{\lambda}{b}. \quad (10.22)$$

Deci, numărul de maxime principale de interferență cuprinse în maximul central de difracție (egal cu numărul de franje din figura de interferență) este

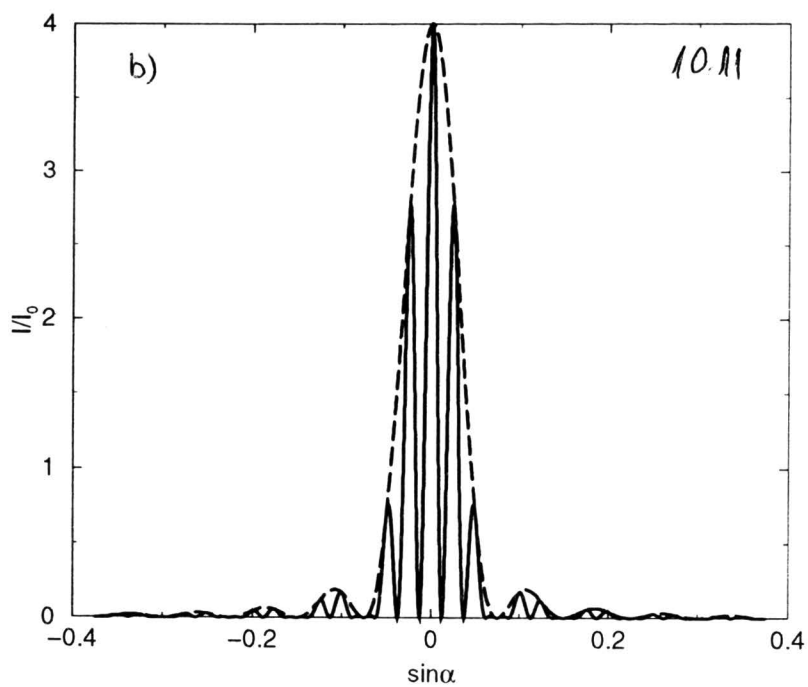
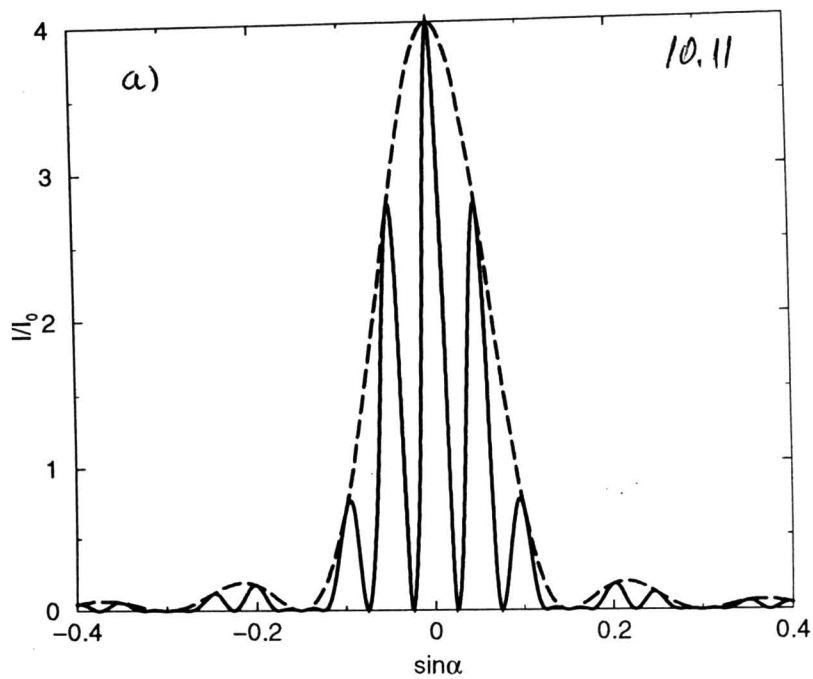
$$2n - 1 = 2\frac{d}{b} + 1.$$

Dacă distanța dintre fante (d) și lărgimea unei fante (b) sunt de același ordin de mărime, numărul de franje este mic (3 pentru $d = b$). Dacă $d \gg b$ figura de interferență nu se obține. O figură de interferență optimă se obține când $b < d$ (pentru $d = 10b$ se obțin 21 de franje).

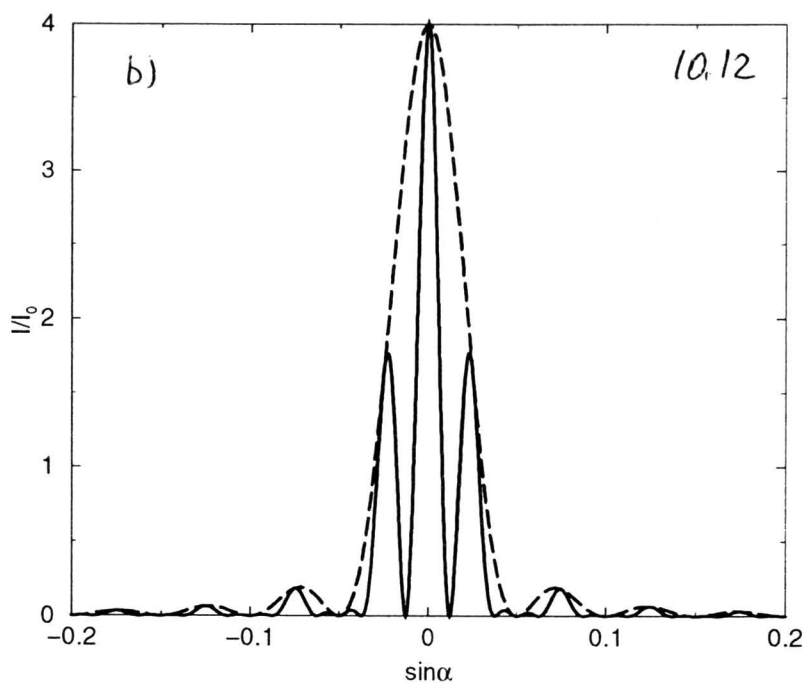
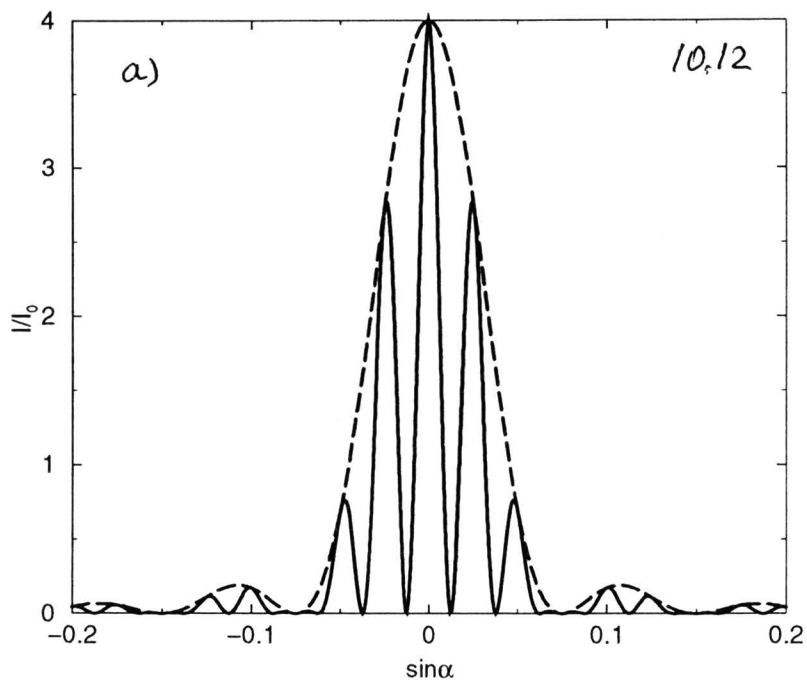
Variația intensității relative I/I_0 în funcție de $\sin \alpha$ (dată de ecuația (10.19)) este ilustrată pentru $a = b + d = 20 \mu\text{m}$, $b = a/3$ și două valori a lui λ : 1000 nm în Fig. 10.11(a) și 500 nm în Fig. 10.11(b). Linia continuă reprezintă funcția $I/I_0(\sin \alpha)$ (dată de (10.19)), iar linia întreruptă funcția $4 \cos^2 \{[\pi(d + b) \sin \alpha]/\lambda\}$ ce corespunde difracției pe o fantă și care înfășoară funcția $I/I_0(\sin \alpha)$. În figurile următoare semnificația celor două linii se păstrează. În Fig. 10.11 se observă că lărgimea maximului central se îngustează când λ scade și întreaga figură se strânge spre zero.

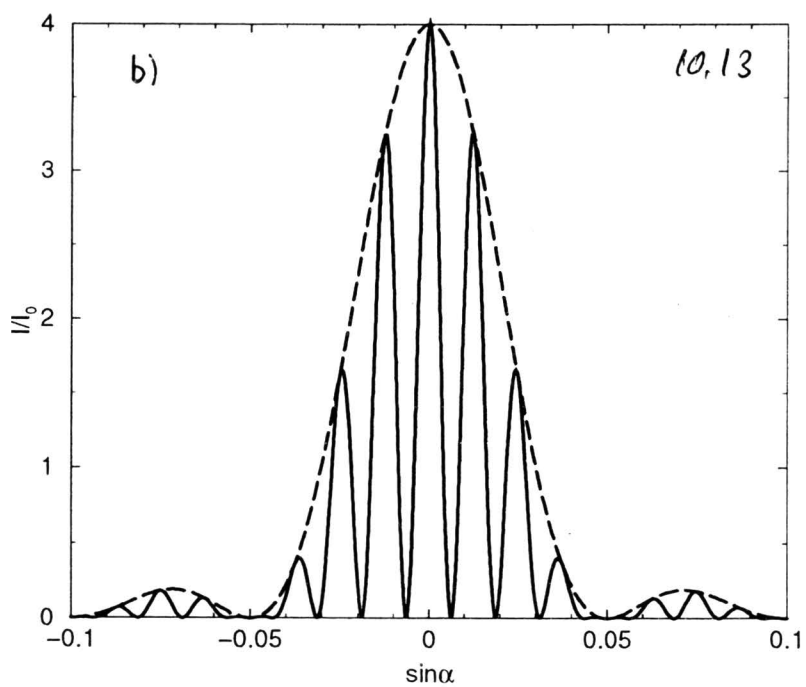
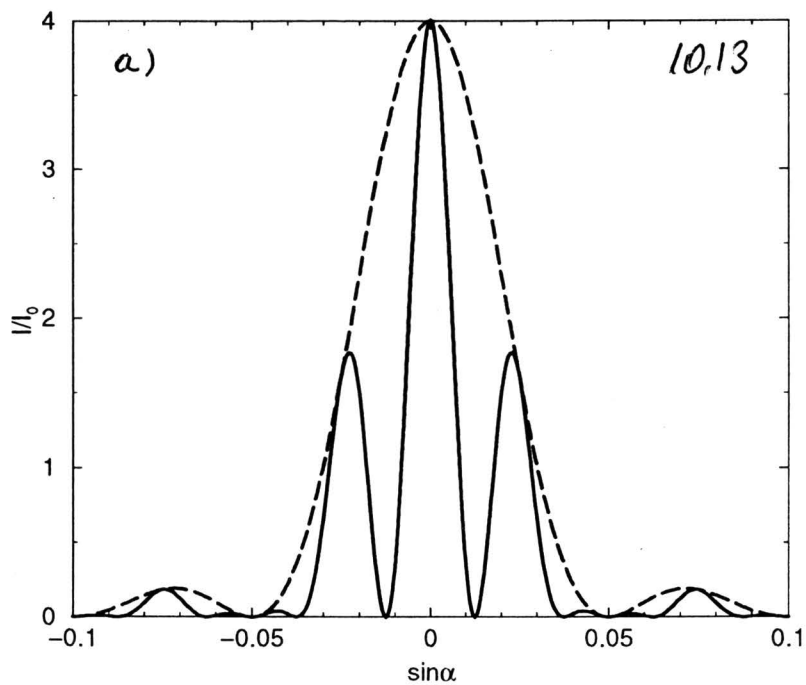
Efectul lățimii (b) fantelor asupra dependenței de $\sin \alpha$ a intensității relative I/I_0 este redat în figura 10.12. Am ales $\lambda = 500 \text{ nm}$, $a = 20 \mu\text{m}$ și două valori pentru b : $a/3$ pentru Fig. 10.12(a) și $a/2$ pentru Fig. 10.12(b). Se constată că lărgimea primului maxim de difracție se îngustează cu creșterea lui b . De asemenea, observăm că numărul franjelor de interferență crește cu micșorarea lui b .

Influența distanței (d) dintre fante asupra dependenței de $\sin \alpha$ a intensității relative I/I_0 este înfățișată în figura 10.13. Am ales $\lambda = 500 \text{ nm}$, $b = 10 \mu\text{m}$ și două valori pentru d : $10 \mu\text{m}$ pentru Fig. 10.13(a) și $30 \mu\text{m}$ pentru Fig. 10.13(b). Observăm că numărul franjelor de interferență este puternic influențat de valoarea lui d (el crește când d se mărește).



177





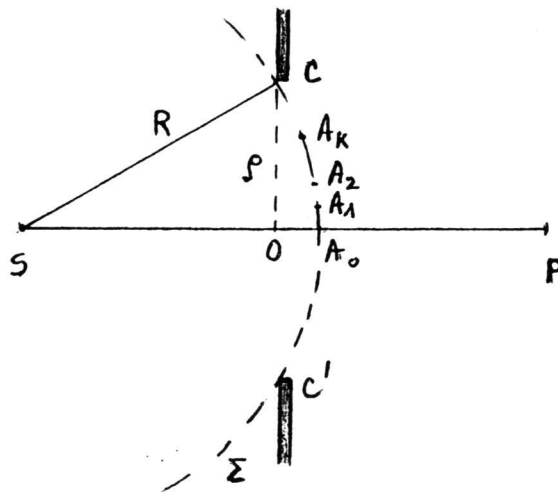


Figura 10.14

10.2 Difrakția Fresnel

Când fie sursa, fie punctul de observație, fie ambele sunt la distanțe finite de deschidere, curbura fronturilor de undă nu mai poate fi neglijată.

Considerăm cazul cel mai simplu de tratat matematic, cel al unei deschideri circulare. Fie o sursă S , aflată la distanța R de ecranul E ce conține orificiul circular CC' de rază ρ , pe dreapta ce trece prin centrul O al deschiderii. Fie P punctul de observație, situat pe dreapta OS , la distanța r de ecran, ca în Fig. 10.14.

Pe suprafața de undă sferică Σ sunt distribuite continuu surse secundare coerente punctiforme. Unda rezultantă în punctul P se obține prin suprapunerea în P a contribuțiilor datorate distribuției continue de surse secundare. Deoarece toate undele ce trec prin puncte situate la aceeași distanță de centrul O parcurg același drum până în punctul P este avantajos să se împartă deschiderea circulară în zone circulare concentrice, numite zone Fresnel. Aceste zone Fresnel pot fi considerate surse secundare. Pentru a obține zonele Fresnel se trasează din P sfere de raze $r, r + \lambda/2, r + \lambda, r + 3\lambda/2, \dots$. Notăm cu A_1, A_2, \dots, A_n punctele de intersecție ale sferelor cu suprafața de undă Σ . Diferența de drum Δr , dintre două unde provenite de la două zone succesive este

$$\Delta r = A_1P - A_0P = A_2P - A_1P = \dots = \lambda/2,$$

unde λ este lungimea de undă a radiației emise de sursa S . Prin urmare, undele ce provin de la două zone vecine sunt în opoziție de fază

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta r = \pi.$$

Fie zona Fresnel de rază r_k . Notăm cu δ_k diferența de drum dintre unda provenită de la zona de rază r_k și cea de la zona de rază r

$$\delta_k = A_k P - A_0 P = k \frac{\lambda}{2} .$$

Deoarece, suprafața de undă are curbura mică, în calcule neglijăm pe OA_0^2 și δ_k^2 . Din teorema lui Pitagora în triunghiul $OA_k P$ rezultă

$$OA_0 = \frac{2r \cdot \delta_k - r_k^2}{2r} . \quad (10.23)$$

Scriem de asemenea, teorema lui Pitagora în triunghiul SOA_k . Obținem

$$OA_0 = \frac{r_k^2}{2R} . \quad (10.24)$$

Din cele două ecuații (10.23) și (10.24) avem

$$r_k^2 = \frac{Rr}{R+r} k \lambda ,$$

unde $k = 2\pi/\lambda$ este numărul de undă. Aria zonei Fresnel cu frontierele r_{k+1} și r_k are expresia

$$S = \pi r_{k+1}^2 - \pi r_k^2 = \pi \frac{Rr}{R+r} \lambda = ct .$$

Deci, toate zonele Fresnel au aceeași arie. Numărul n de zone Fresnel conținute în suprafața orificiului circular de rază ρ este

$$n = \frac{\pi \rho^2}{S} = \frac{\rho^2}{\lambda} \frac{R+r}{Rr} , \quad (10.25)$$

sau

$$nr = \frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{\rho^2}{R\lambda} r . \quad (10.26)$$

Pe baza relației (10.26) se poate determina experimental lungimea de undă a radiației monocromatice utilizate.

Dacă numărul de zone Fresnel este par intensitatea undei rezultante în P este minimă iar dacă numărul de zone Fresnel este impar intensitatea în P este maximă.

10.3 Aplicații

10.1 O radiație monocromatică ($\lambda = 4750 \text{ \AA}$) luminează normal o rețea de difracție. Calculați dispersia unghiulară a rețelei ($D = d\alpha/d\lambda$) în funcție de unghiul de difracție α .

R: Diferențiem relația

$$a \sin \alpha = n\lambda . \quad (10.27)$$

Obținem

$$a \cos \alpha d\alpha = nd\lambda . \quad (10.28)$$

Împărțind cele două relații avem

$$\frac{d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{d\lambda}{\lambda} ,$$

de unde obținem expresia dispersiei unghiulare

$$D = \frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\lambda} . \quad (10.29)$$

10.2 Fie o rețea de difracție cu constanta $a = 1,5 \text{ }\mu\text{m}$. Găsiți dispersia unghiulară corespunzătoare maximului de difracție de ordin maxim al radiației $\lambda = 530 \text{ nm}$, în cazul în care lumina cade pe rețea: a) sub incidență normală, b) sub unghi $i = 45^\circ$.

R: a) Pentru a afla ordinul maxim de difracție punem condiția $\alpha = \pi/2$, deci

$$a \sin \pi/2 = n_m \lambda .$$

Deoarece $a/\lambda = 2,83$ rezultă $n_m = 2$. Pentru $n_m = 2$ rezultă $\sin \alpha = 2\lambda/a$ și $\cos \alpha = \sqrt{1 - 4\lambda^2/a^2}$. Prin urmare $D = n/(a \cos \alpha)$ are valoarea $D = 1,884 \cdot 10^{-3} \text{ rad/nm}$.

b) Pentru $i \neq 0$ condiția de maxim de difracție este

$$a |\sin i \pm \sin \alpha| = n\lambda .$$

În cazul nostru $i = \pi/4$ și $\alpha = \pi/2$, deci

1)

$$a(\sin 45 + \sin 90) = n_m \lambda .$$

Deoarece $a/1,707\lambda = 4,8$ rezultă $n_m = 4$.

2)

$$a |\sin 45 - \sin 90| = n_m \lambda .$$

Deoarece $a/0,293\lambda = 0,83$ rezultă $n_m = 0$.

Pentru $n_m = 4$ rezultă $\sin 45 + \sin \alpha = 4\lambda/a$, de unde $\sin \alpha = 0,708$ și $\cos \alpha = 0,706$. Prin urmare D are valoarea $3,777 \cdot 10^{-3}$ rad/nm.

10.3 Dându-se o rețea de difracție cu 4000 linii/cm, câte ordine de difracție se vor produce pentru întregul spectru vizibil ($0,4 - 0,7$) μm ?

R: Pentru a afla ordinul maxim de difracție punem condiția $\alpha = \pi/2$, deci

$$a \sin \pi/2 = n_m \lambda_{max}.$$

Deoarece $a/\lambda_{max} = 3,57$ rezultă că se obțin 3 ordine de difracție pentru întregul spectru vizibil.

10.4 O rețea de difracție are 3000 linii/cm. Pentru ce lungime de undă din spectrul vizibil se poate observa maximum de ordin 5?

R: Din condiția

$$a \sin \alpha = n \lambda_{max},$$

unde $\alpha = \pi/2$ și $n = 5$ rezultă $\lambda_{max} = a/5 = 0,66 \mu\text{m}$. Ordinul 5 se poate observa cu această rețea pentru lungimi de undă $\lambda < 0,66 \mu\text{m}$.

10.5 O rețea de difracție de 2 cm are 6000 linii. La ce unghiuri vor apărea fascicule de intensitate maximă dacă radiația incidentă are lungimea de undă $\lambda = 5890 \text{ \AA}$?

R: Din condiția

$$a \sin \alpha = n \lambda,$$

obținem $\sin \alpha = n\lambda/a$, deci $\alpha = \arcsin (n\lambda/a)$.

Pentru $n = 0$ avem $\alpha_0 = 0$.

Pentru $n = 1$ rezultă $\sin \alpha_1 = 0,1767$ de unde $\alpha_1 = \pm 10^\circ 10'$.

Pentru $n = 2$ rezultă $\sin \alpha_2 = 0,3534$ de unde $\alpha_2 = \pm 20^\circ 41'$.

Pentru $n = 3$ rezultă $\sin \alpha_3 = 0,5301$ de unde $\alpha_3 = \pm 32^\circ$.

Pentru $n = 4$ rezultă $\sin \alpha_4 = 0,7068$ de unde $\alpha_4 = \pm 44^\circ 58'$.

Anexă

Relații fundamentale din analiza vectorială

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (10.30)$$

$$\text{grad } \phi(a) = \frac{\partial \phi}{\partial a} \text{grad } a, \quad (10.31)$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (10.32)$$

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z, \quad (10.33)$$

$$\text{div } (\text{grad } \phi) = \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad (10.34)$$

$$\Delta(1/r) = 0, \quad (10.35)$$

$$\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}, \quad (10.36)$$

$$\text{rot } (\text{grad } \phi) = 0, \quad (10.37)$$

$$\text{div } (\text{rot } \vec{v}) = 0, \quad (10.38)$$

$$\text{rot } (\text{rot } \vec{v}) = \text{grad } (\text{div } \vec{v}) - \Delta \vec{v}, \quad (10.39)$$

$$\text{grad } (\phi \Psi) = \Psi \text{grad } \phi + \phi \text{grad } \Psi, \quad (10.40)$$

$$\text{div } (\phi \vec{v}) = \phi \text{div } \vec{v} + \vec{v} \text{grad } \phi, \quad (10.41)$$

$$\text{rot } (\phi \vec{v}) = \phi \text{rot } \vec{v} + \text{grad } \phi \times \vec{v}, \quad (10.42)$$

$$\text{div } (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b}. \quad (10.43)$$

Teorema lui Gauss-Ostrogradsky: fluxul vectorului \vec{a} printr-o suprafață închisă oarecare S este egal cu integrala divergenței acestui vector pe volumul mărginit de suprafața S :

$$\oint_S \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV . \quad (11.15)$$

Teorema lui Stokes: circulația vectorului \vec{a} pe un contur închis oarecare Γ este egală cu fluxul lui $\operatorname{rot} \vec{a}$ prin suprafața Σ care se sprijină pe conturul Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS . \quad (11.16)$$

BIBLIOGRAFIE

1. E. Purcell, Electricitate și magnetism, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982.
2. F. Crawford jr., Unde, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
3. D. Halliday și R. Resnick, Fizica (vol. II), , Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1975.
4. G. Aubert, Electromagnetisme, Ed. Dunod, Paris, 1971.
5. R. Feynman, Fizica modernă (vol. II), Ed. Tehnică, București, 1970.
6. R. Kingsbury, Elements of Physics, Ed. van Nostrand, New York, 1965.
7. I. M. Popescu, Fizică (vol. I), Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
8. C. Cioacă, C. Stănescu și M. Fîfîrig, Probleme rezolvate de electricitate, Ed. Tehnică, București, 1997.
9. I. M. Popescu ș. a., Culegere de probleme de fizică, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982.

186





ISBN 973-575-664-1

Lei 83000